

Wykład 10:

Fale cz. 1

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

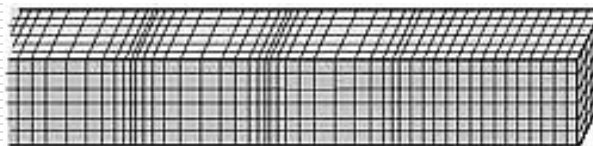
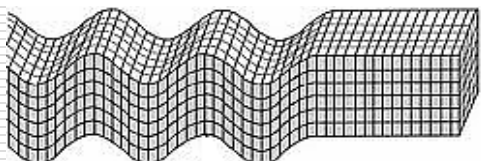
Klasyfikacja fal



- ❑ *fale mechaniczne* – zaburzenie przemieszczające się w ośrodku sprężystym,
- ❑ *fale elektromagnetyczne* – przemieszczające się zaburzenie pola magnetycznego i elektrycznego.
- ❑ *fale materii* – czy elektron jest falą?

Ze względu na kierunek drgań wobec kierunku rozchodzenia się fali dzielimy je na:

- ❑ *poprzeczne* – np. fala na powierzchni wody, fala akustyczna w ciałach stałych,
- ❑ *podłużne* – np. fala akustyczna w gazach.



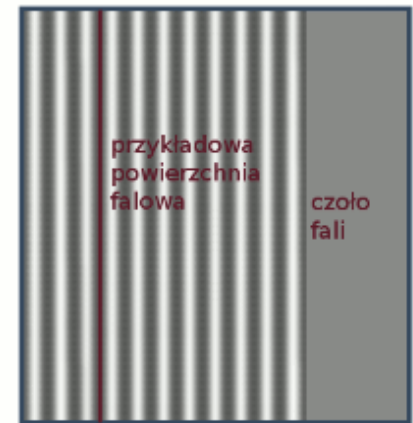
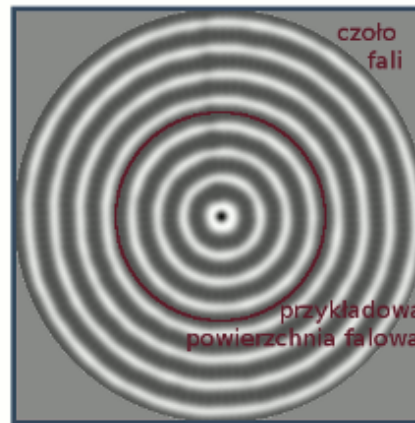
Podstawowe pojęcia

- *Powierzchnia fazowa (falowa)* – to powierzchnia stałej fazy, tzn. drgające cząsteczki ośrodka mają jednakową fazę.

Ze względu na kształt powierzchni fazowej fale dzielimy na:

- fale *płaskie*
- fale *kołowe*
- fale *kuliste*.

FALA KOLISTA ORAZ PŁASKA

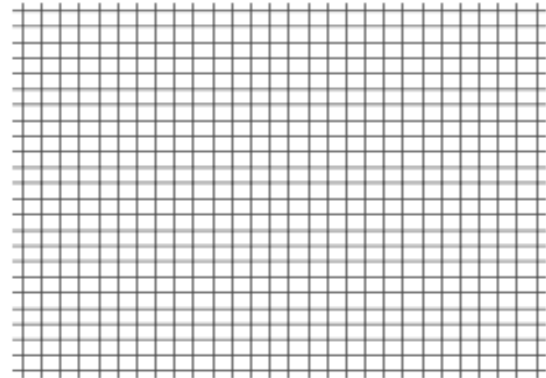
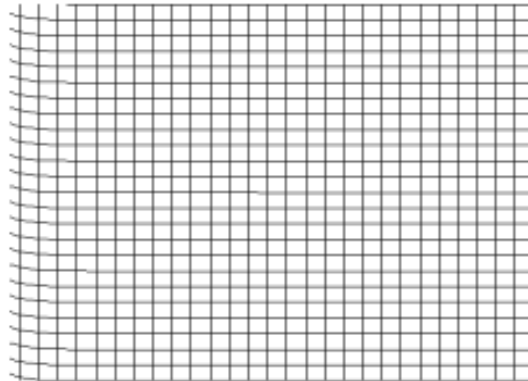


Przykłady modelowania fal

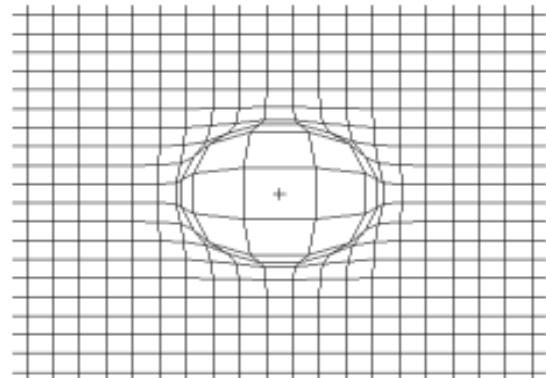
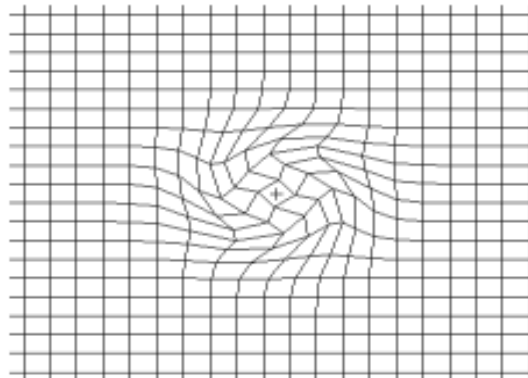
fala poprzeczna

fale podłużna:

fala płaska:



fala kołowa:

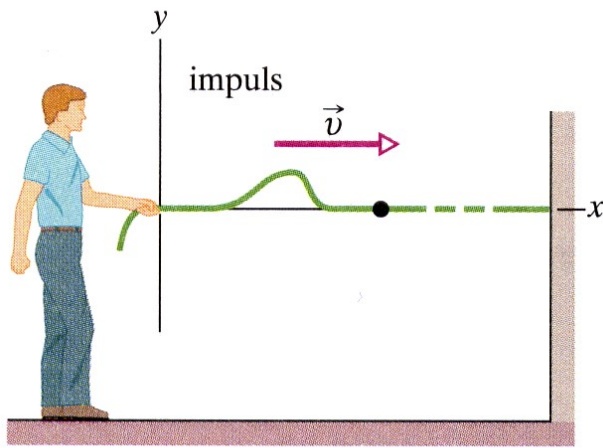


□ *Czoło fali* – najbardziej oddalona od źródła powierzchnia falowa

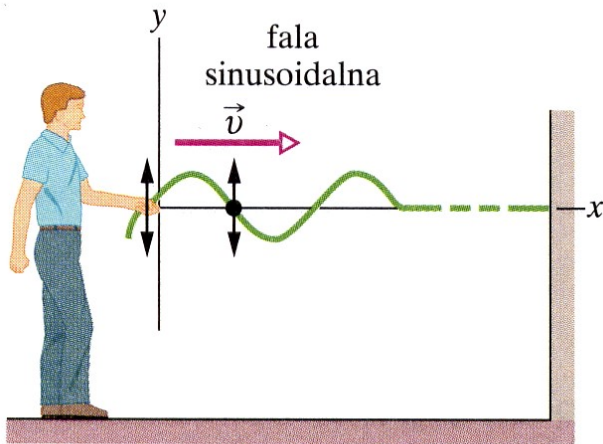


□ *Długość fali* – najkrótsza odległość między powierzchniami falowymi różniącymi się o 2π

□ *Fale spójne (koherentne)* – fazy fal są identyczne lub ich różnica jest stała w czasie



a)



b)

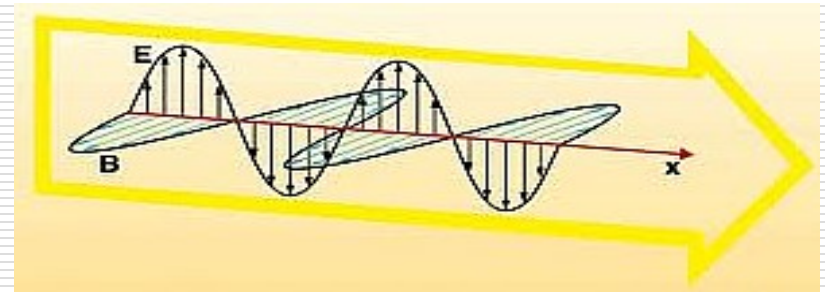
Dla fal mechanicznych rozchodzących się w sznurze, pręcie, słupie powietrza (ośrodku sprężystym), **zaburzeniem** jest wychylenie z położenia równowagi, gęstość, ciśnienie.

Do przenoszenia zaburzenia tj. rozchodzenia się fali konieczny jest ośrodek materialny.

Przenoszona jest energia a nie materia.

Fala elektromagnetyczna (zaburzenie pola E i B) rozchodzi się w próżni – nie jest potrzebny ośrodek materialny.

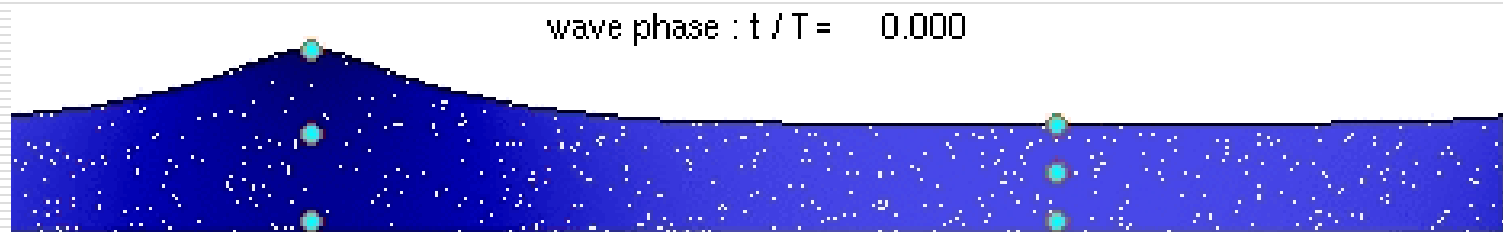
Doświadczenie Michelsona-Morleya, 1887 – „eter świetlny” nie istnieje



Ruch falowy na wodzie

Oscylacje w tego rodzaju ruchu falowym wody są w rzeczywistości rodzajem złożonego ruchu fali podłużnej i poprzecznej.

Cząsteczki wody poruszają się po spirali (prędkość dryftu Stokes'a) w jednym kierunku. Aby zrekompensować przepływ masy wody na powierzchni w jednym kierunku (w stronę brzegu), występuje przepływ wsteczny poniżej powierzchni (prąd wsteczny).



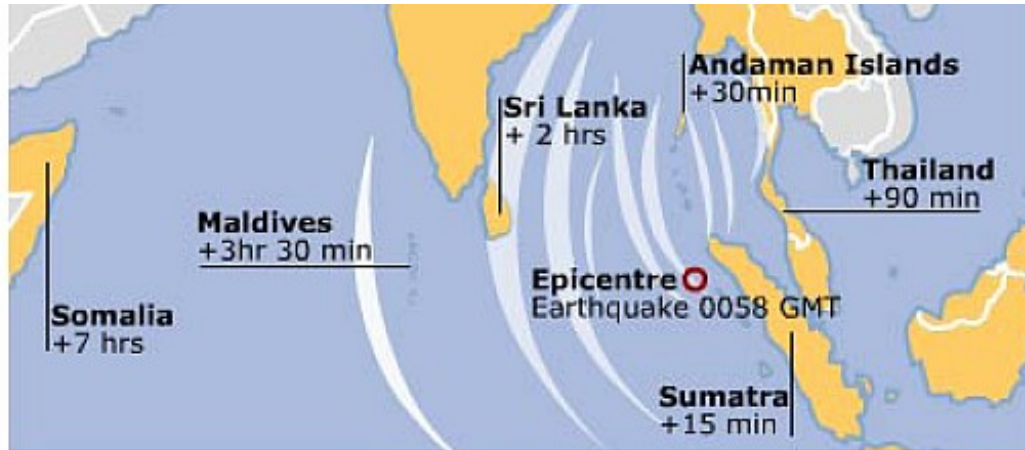
Czy fala przenosi energię?

26 grudnia 2004, największe od 40 lat trzęsienie ziemi wystąpiło na Oceanie Indyjskim pomiędzy płytami australijską i euroazjatycką



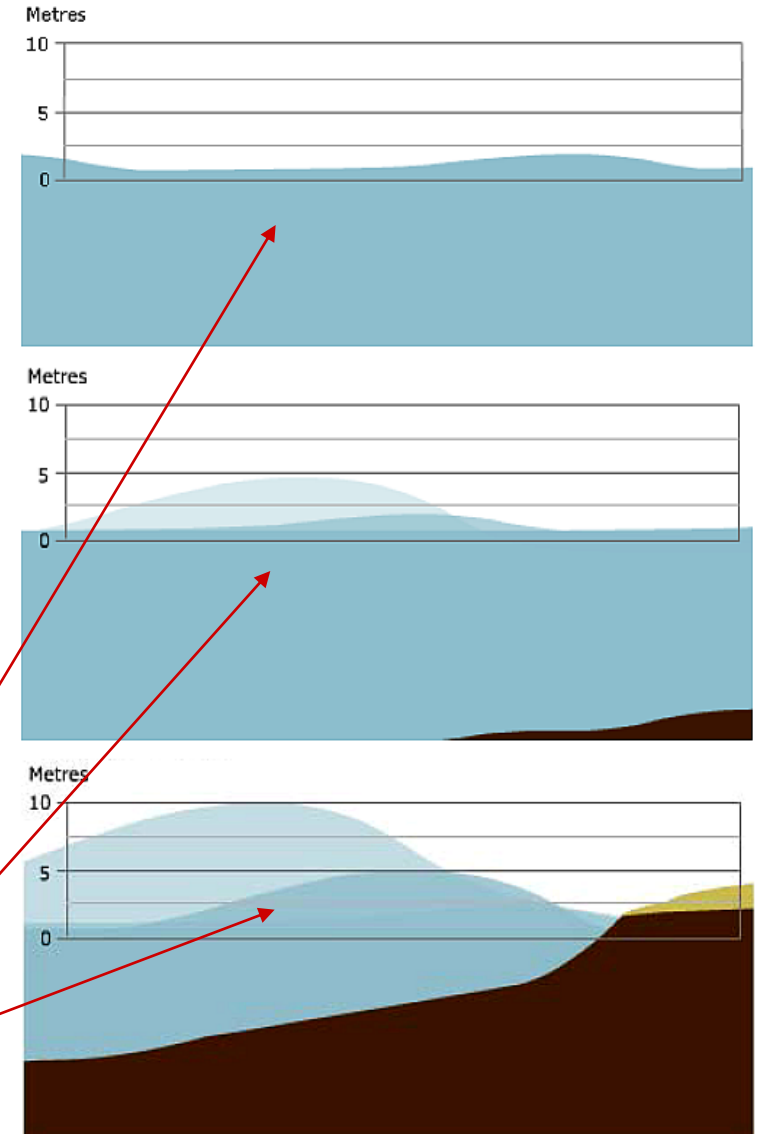
http://news.bbc.co.uk/1/hi/in_depth/4136289.stm

Trzęsienie ziemi spowodowało przerwanie dna morskie wzdłuż linii uskoku i powstanie fali tsunami niosącej zniszczenie na odległość 4500 km w ciągu 7 godzin



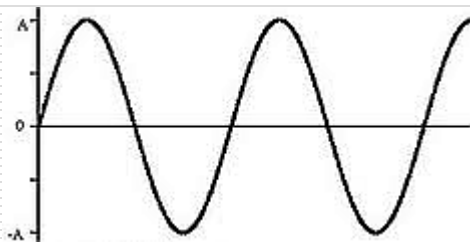
Fala tsunami na głębokiej wodzie:
mała amplituda, duża szybkość
rozchodzenia się 800 km/h

Fala tsunami na płytkiej wodzie:
mniejsza szybkość rozchodzenia się ale
duża amplituda (nawet do 30 m)

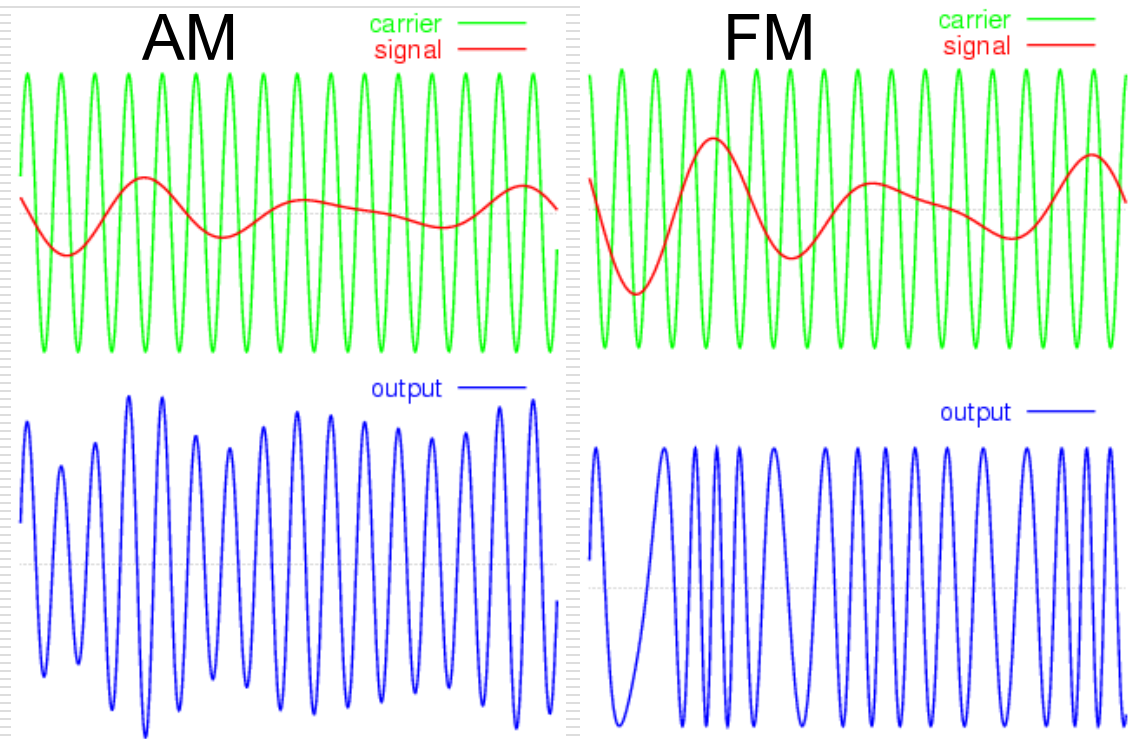


Czy fala przenosi informację?

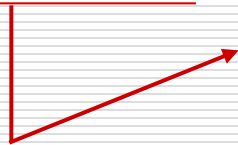
Nie !



Tak !



Modulacja AM lub FM



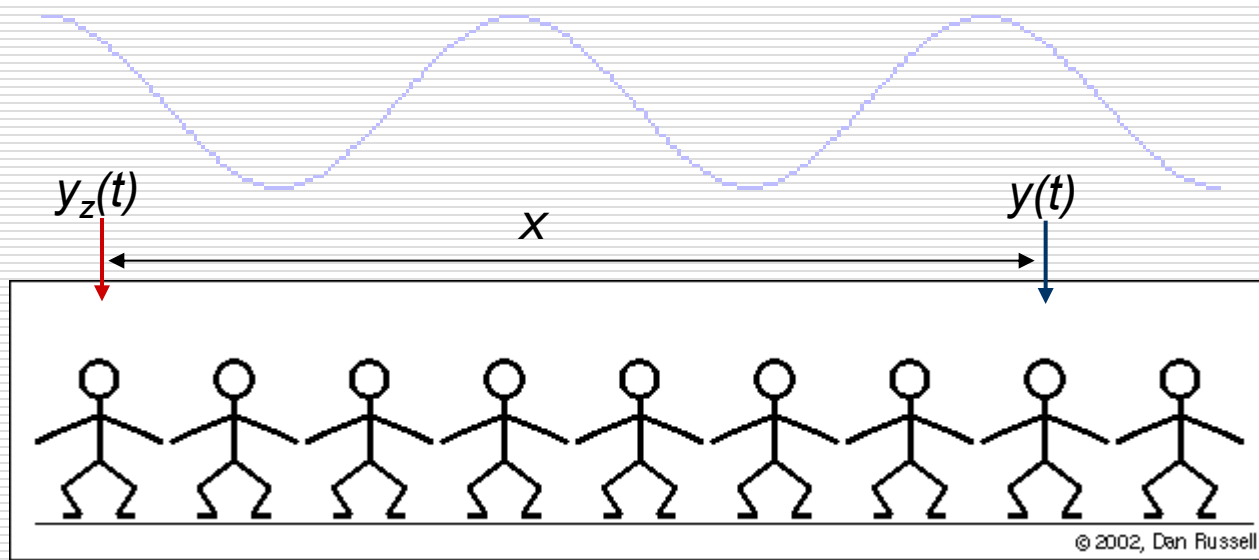
Równanie fali

Drgania „źródła” : $y_z(t) = A \sin(\omega t)$

Zaburzenie dociera się do „odbiornika” po czasie $t' = x/v$

Równanie drgań „odbiornika” jest więc opóźnione w fazie:

$y(t) = A \sin(\omega t - \varphi_0)$ gdzie $\varphi_0 = \omega t'$



Częstość drgań źródła i odbiornika są takie same $\Rightarrow \omega = \frac{\varphi_0}{t'}$

Równanie drgań odbiornika $\rightarrow y = A \sin(\omega t - \varphi_0)$

Kąt fazowy φ_0 jest określony przez szybkość fali v i odległość od

źródła x : $v = \frac{x}{t'}$ a zatem: $\varphi_0 = \omega t' = \omega \frac{x}{v}$

$$y = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) = y(x, t)$$

wprowadzając oznaczenie $\frac{\omega}{v} = k$ gdzie k to *liczba falowa*

otrzymujemy równanie fali rozchodzącej się w kierunku dodatnim

osi $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ lub równoważne $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

lub dla fali rozchodzącej się w kierunku ujemnym osi X:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$$

Skoro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a $v = \frac{\lambda}{T}$ więc $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$y(x, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

faza fali



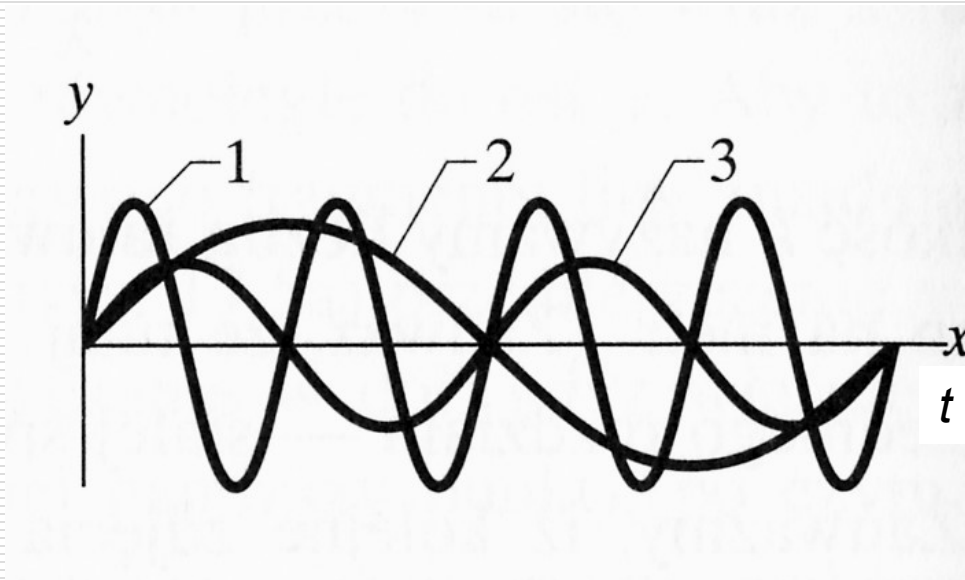
W przestrzeni trójwymiarowej:

$$y(\vec{r}, t) = y_m \sin (\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)$$

gdzie $\vec{k}$ jest to wektor falowy

Przykład

Na rysunku nałożono trzy zdjęcia migawkowe, przedstawiające fale biegnące wzdłuż pewnej linii. Fazy fal są opisane zależnościami: (a) $2x-6t$, (b) $4x-16t$, (c) $8x-4t$. Dopasuj wykresy do tych wyrażeń.



$$y(x): (a)-2 \quad (b)-3 \quad (c)-1$$

$$y(t): (a)-3 \quad (b)-1 \quad (c)-2$$

Prędkość fali biegnącej

Wychylenie punktu ośrodka ciągle się zmienia $\Rightarrow$ punktowi fali o ustalonej fazie odpowiada co chwilę inny punkt ośrodka.

Warunek stałości fazy: $kx - \omega t = \text{const}$

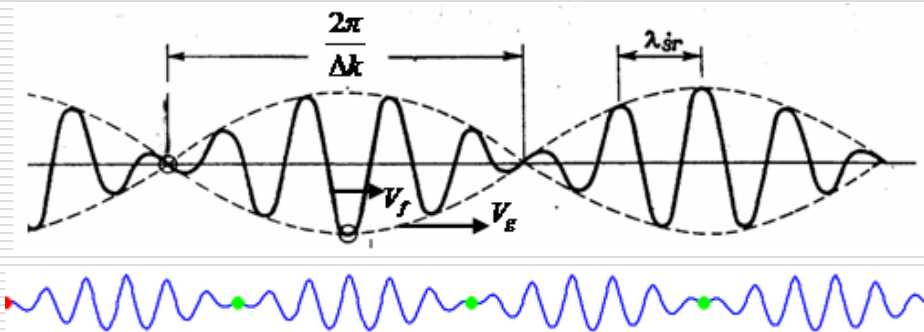
Prędkość fali – prędkość z jaką przemieszczają się punkty fali o tej samej fazie obliczamy z pochodnej tego wyrażenia:

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

Jest to prędkość fazowa - prędkość powierzchni fazowej (czoła fali).

Jeżeli fala dana jest równaniem $y(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ wówczas jej prędkość $v = -\frac{\omega}{k} < 0$ co oznacza falę biegnącą w lewo.

- Prędkość fazowa: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$
- Prędkość grupowa, to prędkość grupy („paczki”) fal nieznacznie różniących się od siebie częstością:
- Przykład: dwie fale o takich samych amplitudach ale nieznacznie różniących się długościami interferują ze sobą dając prawie harmoniczną falę biegnącą o modulowanej amplitudzie.



$$\omega = \omega(k) = v_f \cdot k \quad \vec{v}_g = \frac{d\vec{\omega}}{d\vec{k}} = \frac{d}{dk}(v_f k) \quad \Rightarrow \quad v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

- Prędkość grupowa jest ważna w zjawiskach falowo-korpuskularnych.

Od czego zależy prędkość fali ?

Prędkość fali mechanicznej określa bezwładność i sprężystość ośrodka

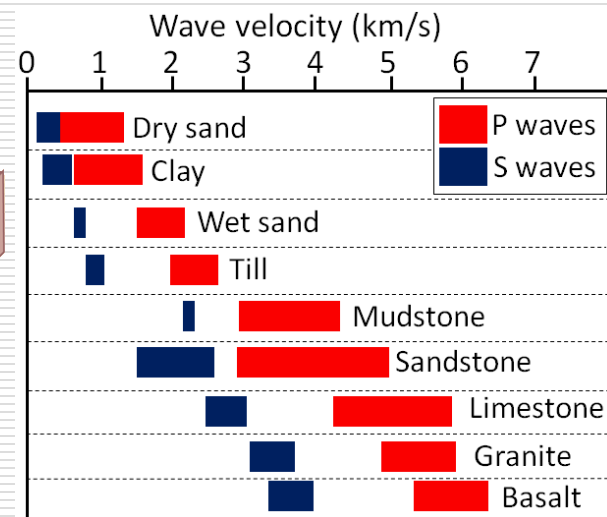
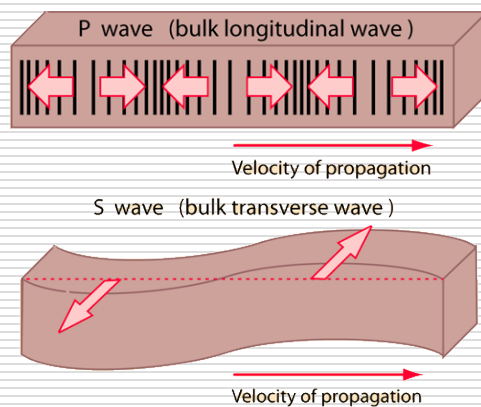
□ Prędkość fali mechanicznej w ciele stałym:

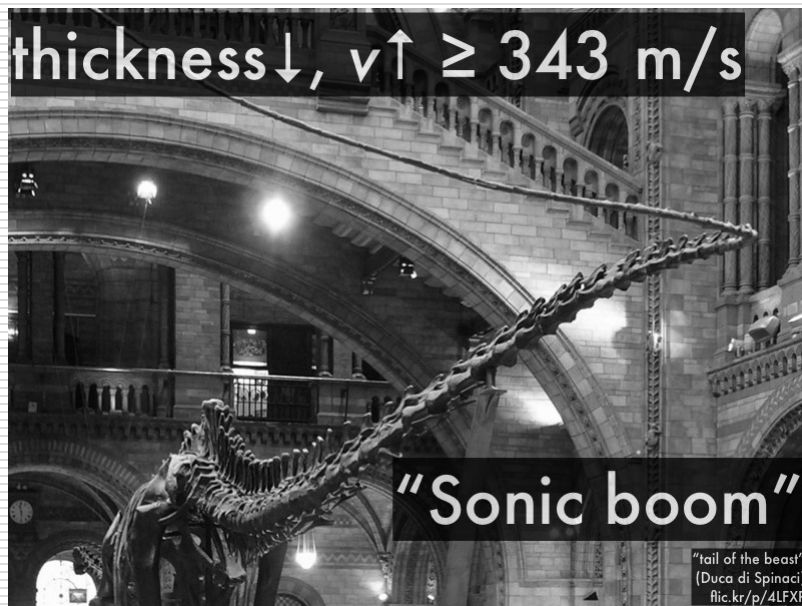
$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

← moduł Younga

← gęstość

Speed of Sound	
Medium	Speed (m/s)
Air at 0°C	331
Air at 20°C	343
Water at 20°C	1482
Lead	1960
Glass	5640
Steel	5960



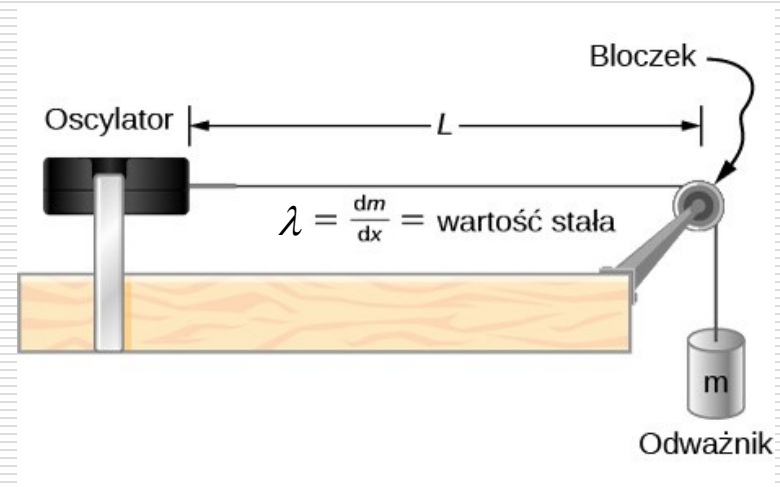


W strunie:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$$

← naprężenie

← gęstość liniowa



❑ Prędkość fali akustycznej w gazie:

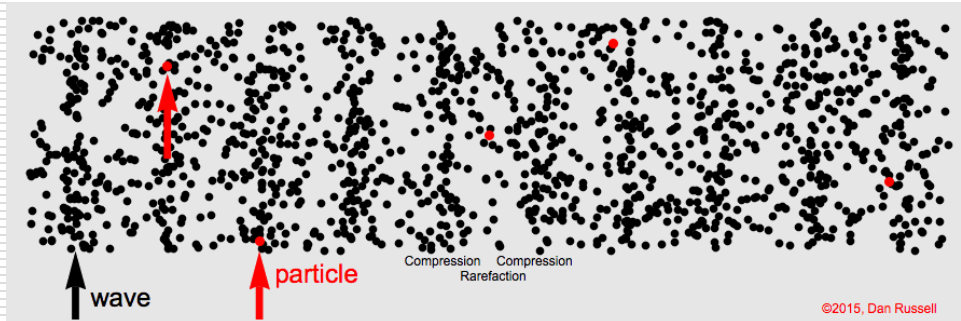
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

← moduł ścisłości $B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$

← gęstość ρ

$$v = \sqrt{\frac{\chi \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\chi R T}{\mu}}$$

$$\chi = \frac{c_p}{c_v}$$



Gas	Speed of Sound (m/s)
Xenon	178
Sulfur Dioxide	201
Krypton	221
Propane	258
Carbon Dioxide	267
Argon	319
Oxygen	326
Ethylene	327
Nitrogen	349
Methane	446
Helium	1007
Hydrogen	1270

Temperature	Speed of sound
<u>T (°C)</u>	c (m/s)
35	351.88
30	349.02
25	346.13
20	343.21
15	340.27
10	337.31
5	334.32
0	331.30
-5	328.25
-10	325.18
-15	322.07
-20	318.94
-25	315.77

Przykłady

- Wyprowadź związek między różnicą faz drgań dwóch punktów ośrodka, w którym rozchodzi się fala o długości λ , a różnicą odległości tych punktów $|x_1 - x_2| = |\Delta x|$ od źródła fali. Dla jakiej odległości punktów różnica faz będzie maksymalna?
- Fala poprzeczna o amplitudzie 0,5 cm i częstotliwości 500 Hz rozchodzi się w ośrodku sprężystym z szybkością 250 m/s.
 - A. Zapisz równanie tej fali
 - B. Oblicz odległość dwóch punktów tej fali, których różnica faz drgań wynosi 60°
- Oblicz amplitudę ruchu falowego, jeżeli punkt znajdujący się w odległości $1/12$ długości fali od źródła drgań ma po upływie jednej szóstej okresu wychylenie równe 2.5 cm

Równanie falowe – różniczkowe równanie ruchu fali

Równanie fali $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ przypomina rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego. Sprawdźmy jakiego równania jest naprawdę rozwiązaniem:

□ obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t) = \underline{-\omega^2 y(x, t)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t) = \underline{-k^2 y(x, t)}$$

□ skoro $\omega = v \cdot k$ to $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underline{-v^2 k^2 y(x, t)}$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

więc ostatecznie :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Równanie falowe 3D

Zaburzenie jest opisywane funkcją $\Psi(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta$$

Operator różniczkowy Laplace'a
(laplasjan)

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Energia i natężenie fali

- Średnia energia ruchu drgającego elementu ośrodka o masie m , objętości V wynosi $\bar{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

- a średnia gęstość energii $\langle w_E \rangle = \frac{\bar{E}}{V} = \frac{1}{2} \frac{m}{V} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

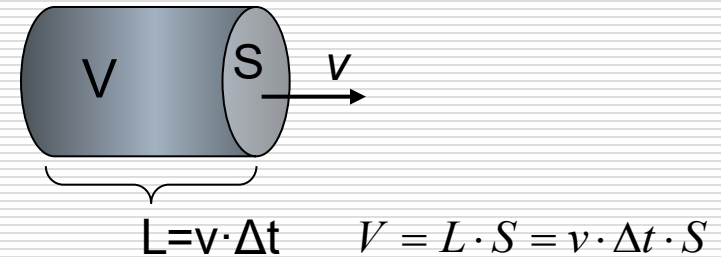
- Natężenie fali – określa przepływ energii (z szybkością v) w jednostce czasu przez jednostkowy wycinek powierzchni falowej

$$I = \frac{\bar{E}}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{P}}{S}$$

- natężenie czyli średnia moc przechodząca przez jednostkowy wycinek powierzchni falowej

$$[I] = 1 \text{ W/m}^2$$

Przez powierzchnię S , w czasie Δt przejdzie tyle energii fali ile jest zawarte w objętości V



$$\bar{E} = \langle w_E \rangle \cdot V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \cdot \Delta t \cdot S$$

zatem natężenie

$$I = \frac{\bar{E}}{S \cdot \Delta t} = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega^2 A^2$$

Zależność natężenia i średniej mocy fali od kwadratu amplitudy oraz od kwadratu częstości ma charakter ogólny i obowiązuje dla wszystkich rodzajów fal mechanicznych

Dla fal elektromagnetycznych nie zależy od częstości fali

Przykładowo: moc akustyczna ludzkiego narządu mowy (podczas „normalnego” mówienia) jest rzędu $1\mu\text{W}$, a podczas bardzo głośnego śpiewu czy krzyku osiąga 1mW . Maksymalne moce akustyczne głośników koncertowych mierzone są w **setkach** watów.

□ Zadanie.

Wewnątrz falowodu o średnicy 5 cm biegnie w powietrzu fala sinusoidalna o natężeniu $I = 10^{-6}\text{W/m}^2$. Oblicz jaka energia jest przenoszona przez falę w ciągu 1 minuty.

Rozwiązanie

$$I = \frac{\overline{E}}{S \cdot \Delta t} \Rightarrow \overline{E} = I \cdot \pi R^2 \cdot \Delta t \approx 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

