

Wykład 11: Grawitacja



dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Siły centralne

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{r} = \frac{C}{r^3} \vec{r} \quad F = \frac{C}{r^2}$$

□ Dla oddziaływań grawitacyjnych

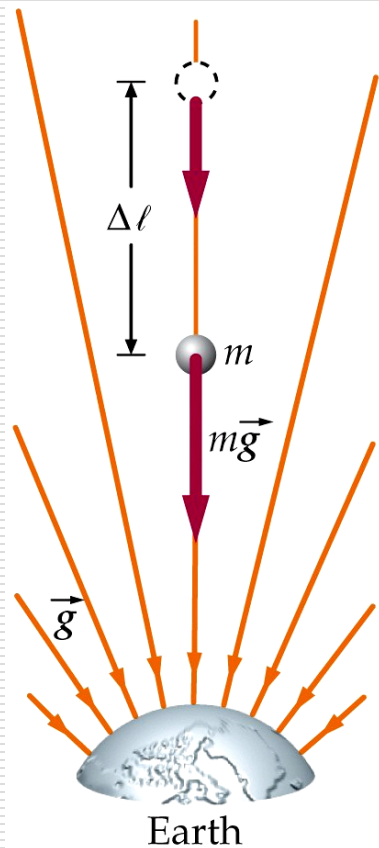
$$C = -Gm_1m_2$$

gdzie $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2} \right]$

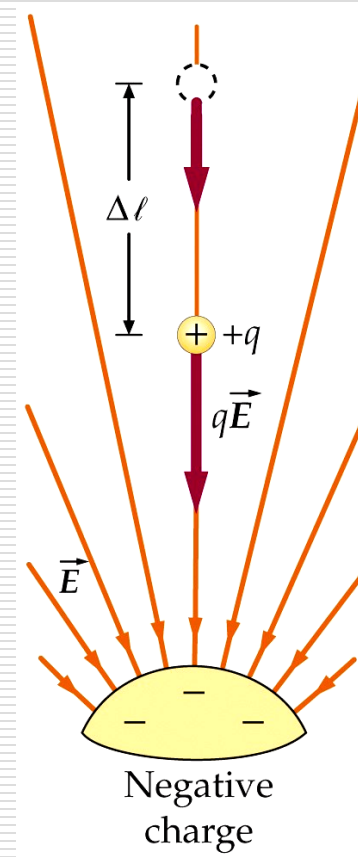
□ Dla oddziaływań elektrostatycznych

$$C = k \cdot q_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

gdzie $k \approx 8,99 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right]$



pole grawitacyjne



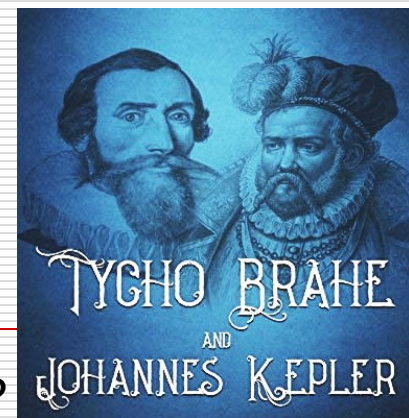
pole elektrostatyczne ładunku ujemnego

Oddziaływanie grawitacyjne jest dużo słabsze niż elektrostatyczne

Dla dwóch elektronów

$$\frac{\text{Przyciąganie grawitacyjne}}{\text{Odpychanie elektrostatyczne}} = \frac{1}{4,17 \cdot 10^{42}}$$

Droga do prawa powszechnego ciążenia



- ❑ Ruch orbitalny planet wokół Słońca – jak i dlaczego?
- ❑ Regularne, wieloletnie pomiary – Tycho Brahe (1546-1601)
- ❑ Prawa Keplera
- ❑ Badania powodów ruchu planet
 - Galileusz – zasada bezwładności.
- ❑ Newton (1642-1726): ruch ciała może zmienić tylko siła



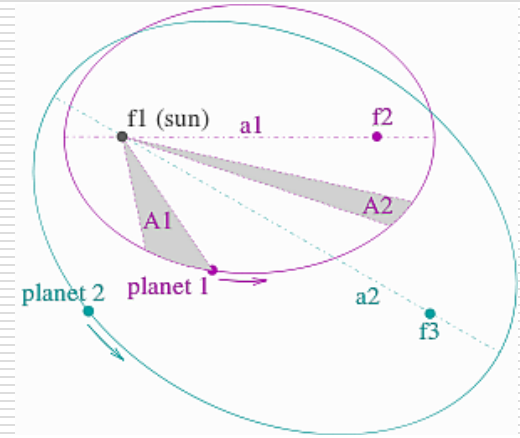
Z II i III prawa Keplera $\Rightarrow$ Słońce jest źródłem sił radialnych $\sim 1/r^2$

- ❑ Newton postulował powszechność tej siły – wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie.



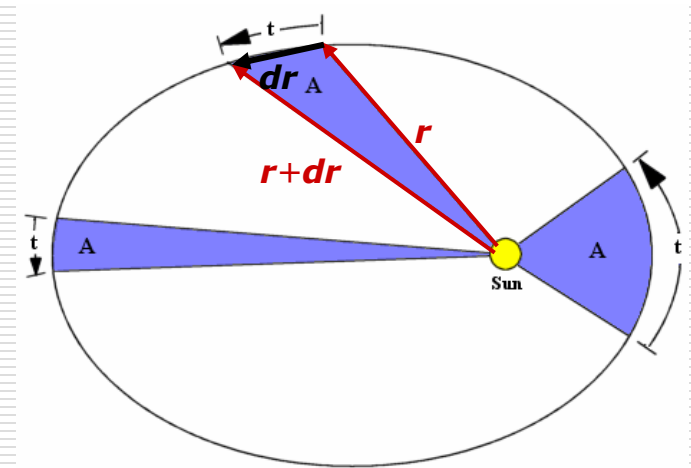
Prawa Keplera (1571-1630)

- I. Wszystkie planety krążą po elipsach.
W ognisku elipsy znajduje się Słońce.
- II. Pola zakreślane przez wektor wodzący (od Słońca) w jednakowych odstępach czasu są równe.



Zakreślane pole:

$$dA = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) dt$$



$$dA = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})dt$$

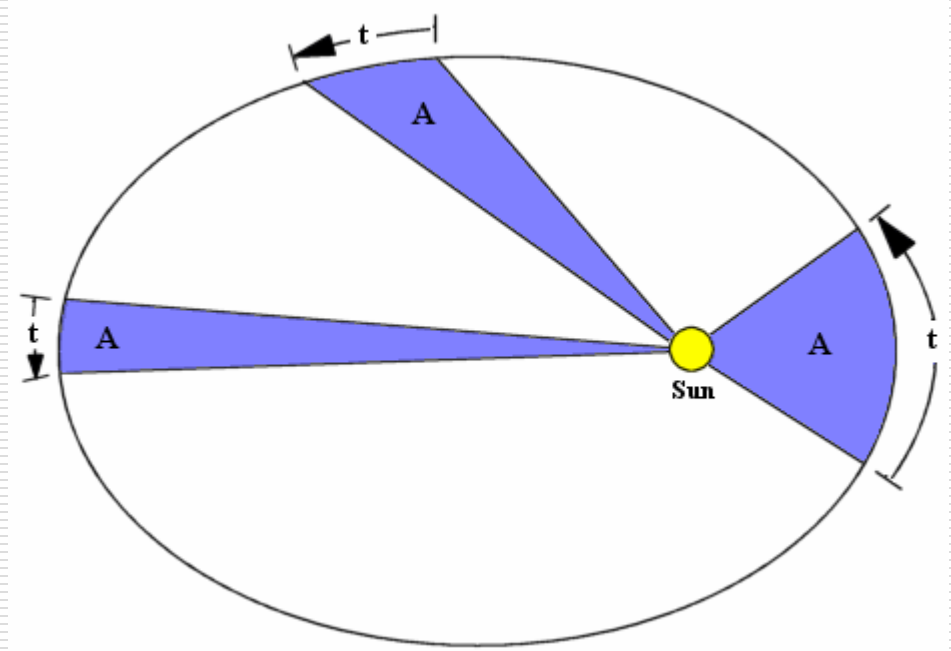
tzw. „prędkość
polowa” $\rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{\vec{L}}{2m}$

$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ jeżeli nie działają siły zewnętrzne:

$$\vec{L} = \text{const}$$

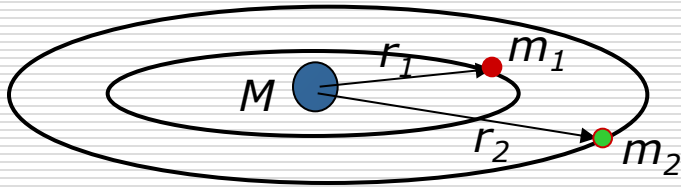
$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \text{const}$$

□ *Prędkość polowa
jest stała!*



- *III Kwadraty okresów obiegów różnych planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześciątów dużych półosi elipsy.*

Powodem ruchu po orbicie jest siła dośrodkowa – jest nią siła grawitacji:



$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \text{const}}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

PRZYKŁADY:

1. W pewnym układzie słonecznym satelity badawcze okrążają planety o różnej gęstości, pozbawione atmosfery- tuż nad ich powierzchniami. A) Obliczyć, jak zależy czas okrążenia przez satelitę od gęstości planety. B) Czy czas obiegu satelity zależy od promienia planety i od masy satelity?

Rozwiązanie:

Dlaczego krążą? Powód: $G \frac{\cancel{M} \cancel{m}}{\cancel{R^2}} = \frac{\cancel{m} \cancel{v}^2}{\cancel{R}}$ $v = \frac{2\pi R}{T}$

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$G \frac{\rho 4\pi R^3}{3R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}$$

2. Okres obiegu stacji kosmicznej po kołowej orbicie o promieniu R wynosi T . Druga stacja kosmiczna o dwukrotnie większej masie porusza się po orbicie o promieniu $4R$. Oblicz jej okres obiegu planety.

$$\text{Odp.: } T_x = 8T_1$$

3. Promień orbity Ziemi wynosi $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Znając stałą $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ oblicz masę Słońca.

$$\text{Odp.: } M \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Prędkości kosmiczne



- V_I – jej osiągnięcie pozwoli na poruszanie się po zamkniętej orbicie o promieniu R bliskim promieniowi ciała niebieskiego.

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mV_I^2}{R} = \frac{GMm}{R} \Rightarrow V_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



- V_{II} – początkowa -aby opuścić pole grawitacyjne danego ciała niebieskiego (*prędkość ucieczki*).

$$E_{ku} + E_{pR} = E_{p\infty}$$

$$\frac{mV_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{\infty} = 0 \Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

V_{II} – przy starcie z Ziemi: $V_{II} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$

ALE:

Wykorzystując w pierwszym przypadku ruch obrotowy Ziemi (na równiku 1,7 km/s) czyli wystarczy prędkość 9,5 km/s.

- V_{III} – przy starcie z orbity Ziemi (R_{S-Z}), aby opuścić Układ Słoneczny:

$$\Rightarrow V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{S-Z}}} \quad V_{II} = 4,21 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 42,1 \text{ km/s} = 150\,000 \text{ km/h}$$

ALE:

Uciekając z pola grawitacyjnego Słońca, wykorzystuje się szybkość orbitalną Ziemi – 30 km/s, więc wystarczy tylko nadać ciału prędkość 12 km/s + możliwa „asysta grawitacyjna” innych planet!

- V_{IV} – aby opuścić Drogę Mleczną: $V_{IV} = 550 \text{ km/s}$ ale wykorzystując ruch Słońca wokół środka Galaktyki $V_{IV} = 330 \text{ km/s}$

Przykłady:

$$M_Z = 5,96 \cdot 10^{24} \text{kg}; \quad R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{kg}; \quad R_{S-Z} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{m}$$

- Oblicz prędkość orbitalną Międzynarodowej Stacji Kosmicznej orbitującej na wysokości $h = 400 \text{ km}$.

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}} = 7,67 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

- Jak daleko doleciałaby rakietą starując w kierunku „od Słońca” z wokółziemskiej orbity z prędkością 30 km/s ?

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R_{S-Z}} = -\frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow r = 3 \cdot 10^{11} \text{ m } (= 2 * R_{S-Z})$$

czyli pomiędzy Marsem a pasem planetoid.

Einstein a grawitacja

- wg Newtona oddziaływania grawitacyjne zachodzą w sposób natychmiastowy co jest sprzeczne z postulatem Einsteina o niemożności przesyłania sygnałów z szybkością większą niż szybkość światła.
 - wg Ogólnej Teorii Względności grawitacja jest konsekwencją zakrzywienia czasoprzestrzeni przez obiekty mające masę/ energię.
-

Dygresja: co to jest przestrzeń ?

Geometria: jest to zbiór wszystkich punktów (z przypisywanymi im współrzędnymi) – nie we wszystkich punktach muszą się znajdować ciała.

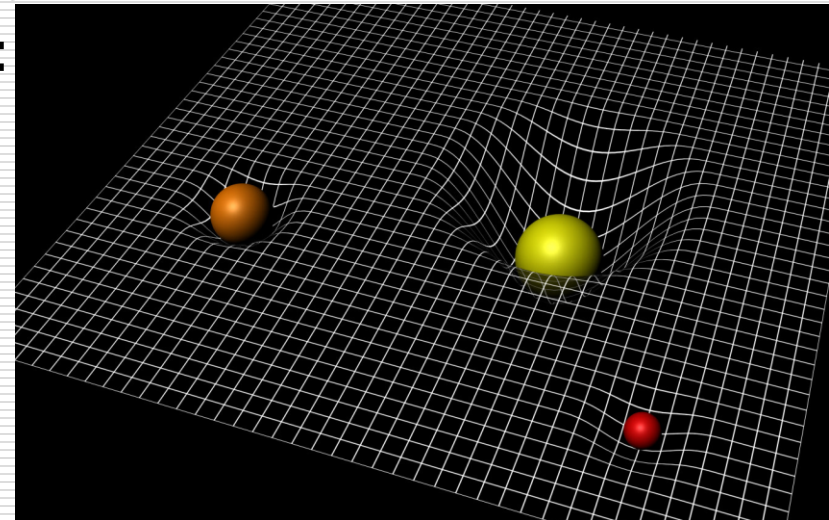
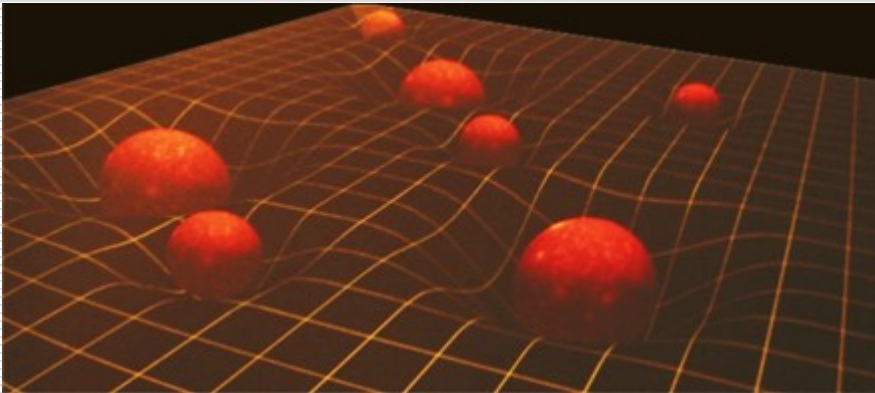
A co to jest czasoprzestrzeń ?

Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń nazywamy czasoprzestrzenią. Również w tym przypadku nie wszystkim abstrakcyjnym zdarzeniom (punktom czasoprzestrzennym) muszą odpowiadać zdarzenia fizyczne.

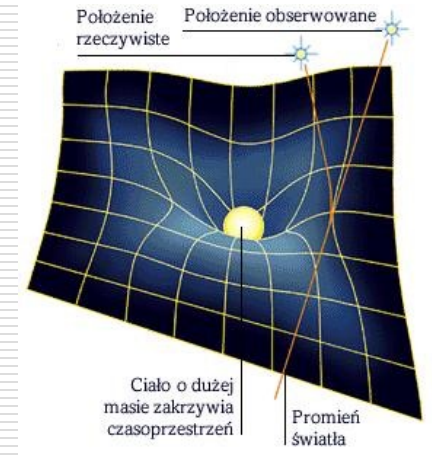
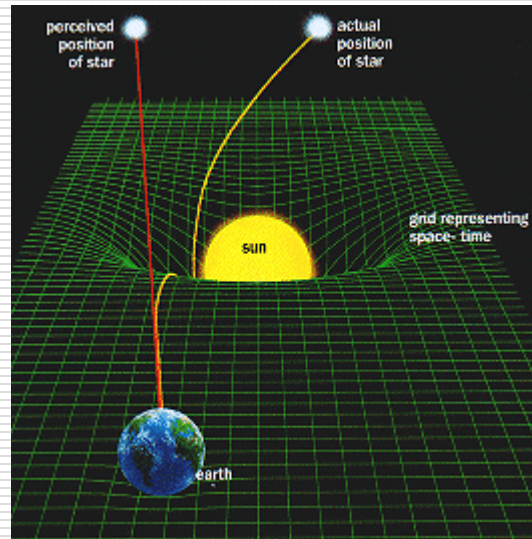
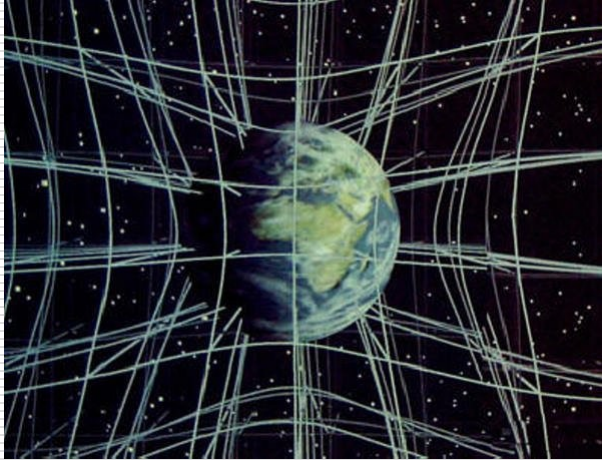
Ilość współrzędnych? **4** ale:

Rysunek bryły 3-wymiarowej robimy na płaszczyźnie. Również czasoprzestrzeń można badać robiąc jej dwuwymiarowy przekrój – tzn. ustalając współrzędne y i z i badając zmienne x i t .

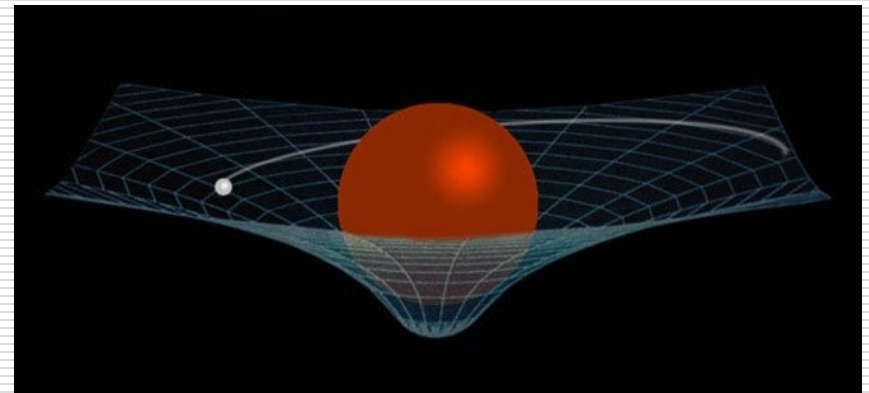
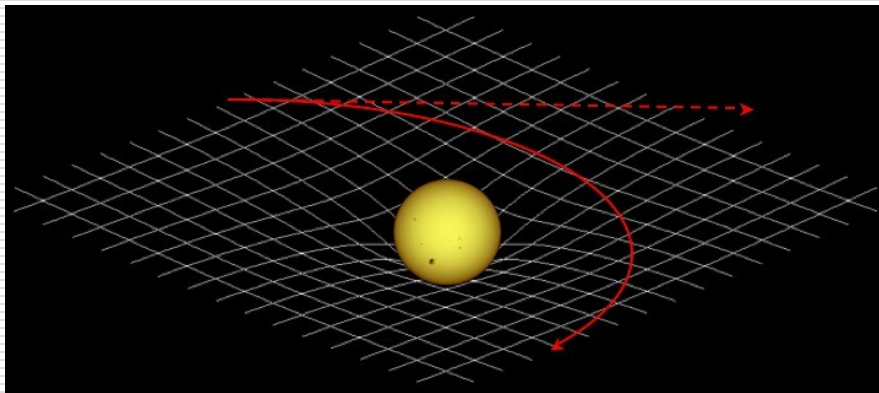
Zatem zakrzywienie czasoprzestrzeni:

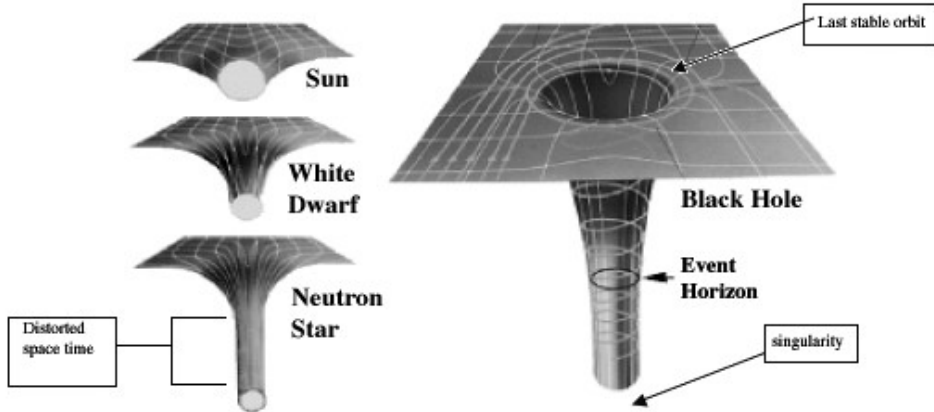


Konsekwencja:
najkrótsza linia
w pobliżu masy
jest zakrzywiona



Eliptyczna orbita planet wynika z zakrzywienia czasoprzestrzeni 





Pole grawitacyjne wirującej czarnej dziury – w tym modelu centralna osobliwość - miejsce, w którym krzywizna osiąga nieskończoność, nie jest już punktem lecz pierścieniem ułożonym w płaszczyźnie równikowej.

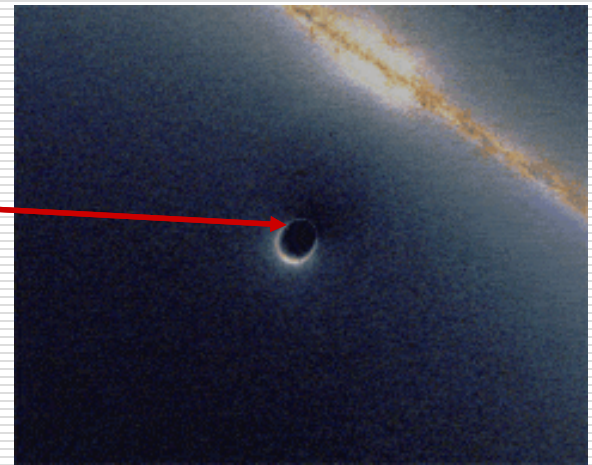
Jeżeli masa gwiazdy i jej promień spełnią warunki:

to światło nie będzie mogło uciec z jej powierzchni.

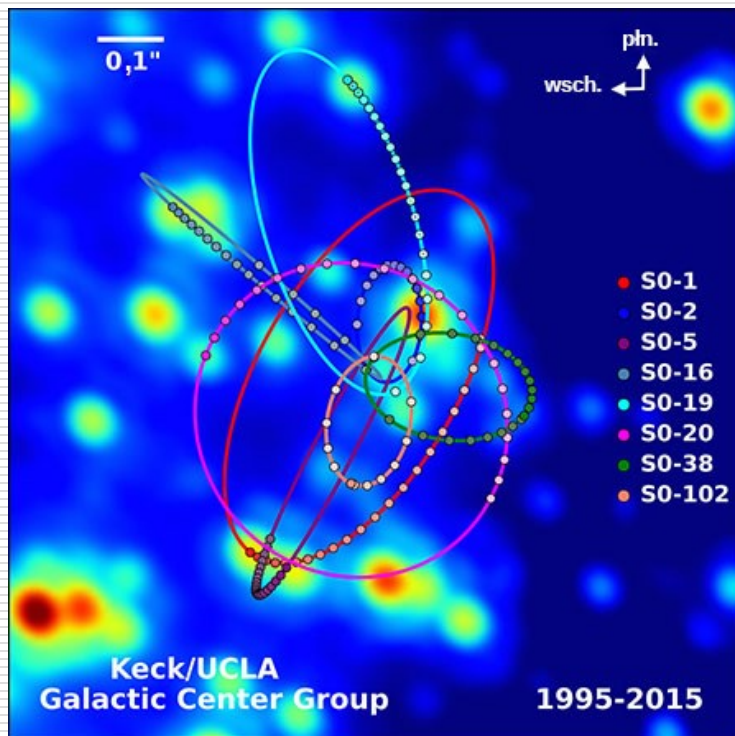
$$V_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}} > c$$

Dla określonej masy M , promień R nosi nazwę promienia Schwarzschilda, a powierzchnia ograniczona tym promieniem to tzw. *horyzont zdarzeń* – trajektorie fotonów są tam zakrzywane i pozostają wewnątrz czarnej dziury.

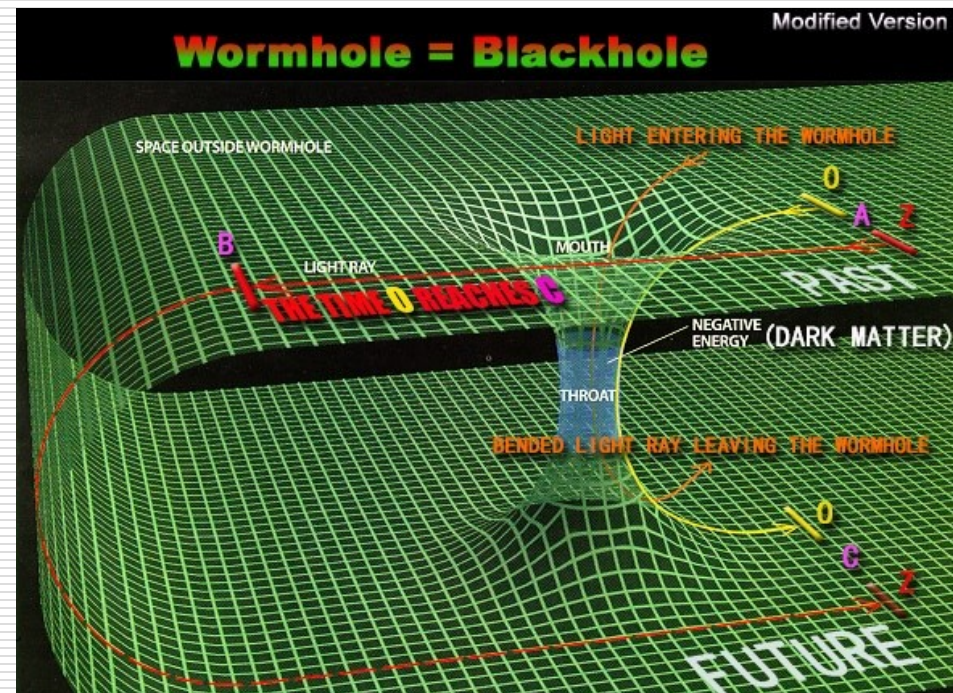
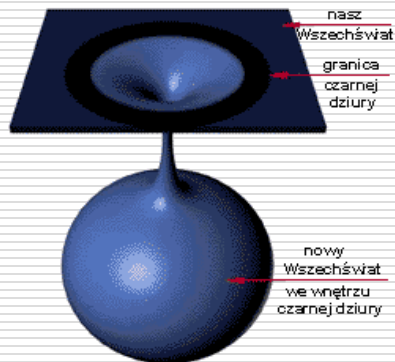
Dla Słońca $R \approx 3 \text{ km}$, a dla Ziemi $R \approx 9 \text{ mm}$ (wówczas jej gęstość $\sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg/m}^3$!)



Wikipedia



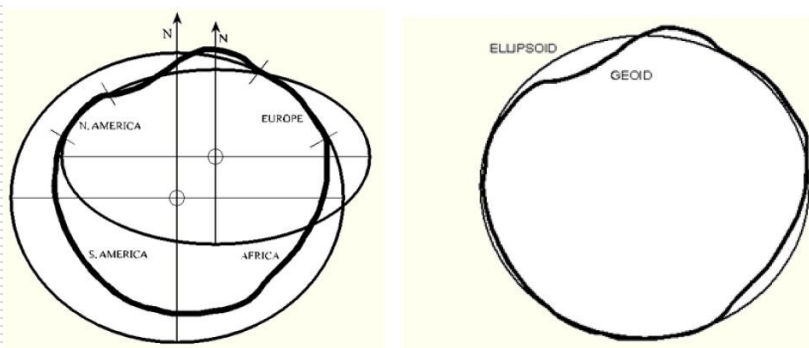
trajektorie gwiazd krążących wokół masy znajdującej się w centrum Drogi Mlecznej. Na podstawie ich ruchu szacuje się, że czarna dziura w centrum galaktyki ma masę równą około 4 milionom mas Słońca.



1935 – tunel Einsteina-Rosena
(połączenie czarnej dziury i białej)

Zależność przyspieszenia ziemskiego od...

- wysokości
(dla szer.geogr. 45°)



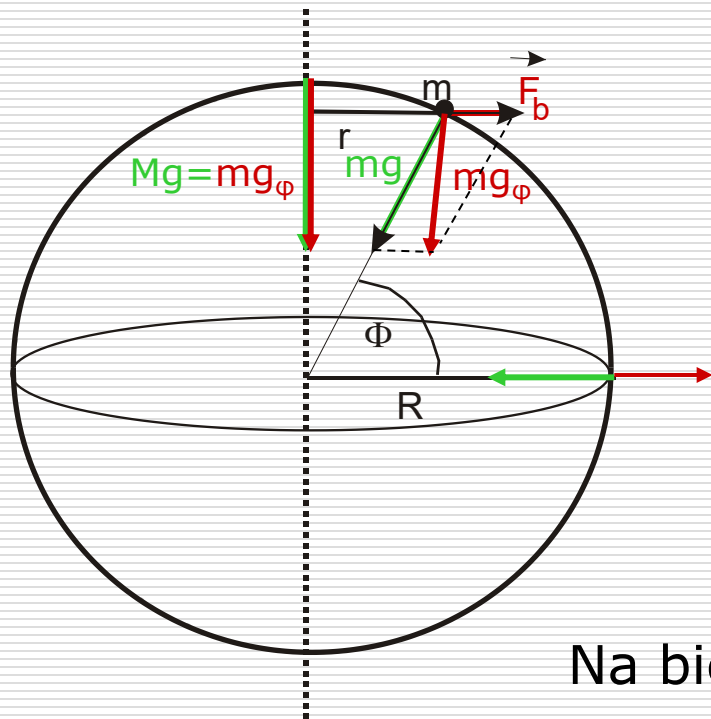
- szerokości geograficznej
(na poziomie morza)
- geoida
- prawie połowa zmiany g
jest wywołana ruchem
obrotowym Ziemi

Wysokość [m]	g [m/s^2]
0	9,806
1000	9,803
4000	9,794
8000	9,782
32000	9,71

Szerokość geograficzna	g [m/s^2]
0°	9,780
30°	9,793
50°	9,811
90°	9,832

W związku z ruchem obrotowym Ziemi, należy uwzględnić działanie siły odśrodkowej bezwładności.

Ciężar ciała na szerokości geograficznej φ :



$$mg_{\varphi} = \frac{GMm}{R^2} - m\omega^2 r$$

$$r = R \cos \varphi \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

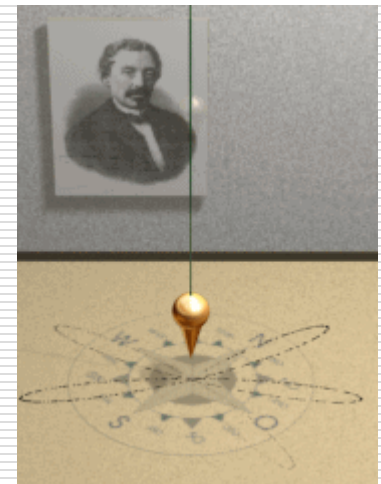
$$g_{\varphi} = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi$$

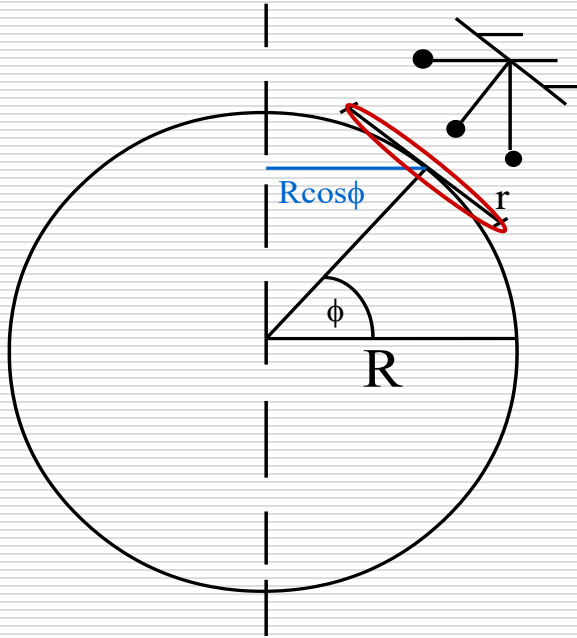
Na biegunie: $\varphi = 90^\circ \quad g_b = \frac{GM}{R^2}$

Na równiku $\varphi = 0^\circ \quad g_r = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

Wahadło Foucault'a

- ❑ płaszczyzna wahań wykonuje pełen obrót w ciągu jednej doby gwiazdowej (23h 56min 04,09s).
- ❑ W każdym wahnięciu wahadło nieznacznie skręca, zbacza z prostej drogi. Zboczenie to odpowiada ściśle kątowi, o jaki w ciągu tego wahnięcia obróciła się Ziemia.
- ❑ Zmianę kierunku ruchu wahadła można zinterpretować jako skutek działania pewnej siły. To jest właśnie siła Coriolisa, a cały efekt dowodzi **nieinercjalności układu odniesienia** związanego z powierzchnią Ziemi, czyli – pośrednio – jej ruchu obrotowego.





Kula wahadła Foucaulta wykonuje wahania nad pierścieniem o promieniu r , a płaszczyzna wahań obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara.

Prędkości względne krańcowych punktów pierścienia – północnego i południowego są różne. Szybciej porusza się punkt leżący dalej od osi obrotu.

Obliczamy prędkości liniowe odpowiednio północnego i południowego punktu pierścienia:

$$v_N = \omega R \cos \phi - \omega r \sin \phi$$

$$v_S = \omega R \cos \phi + \omega r \sin \phi$$

$$\Delta v = \omega r \sin \phi$$

Różnica pomiędzy każdą z tych prędkości a prędkością środka pierścienia wahadła Foucaulta:

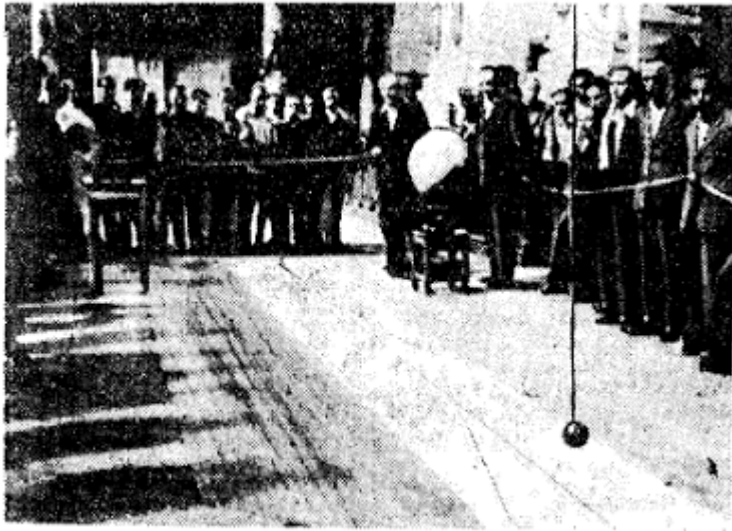
Skoro obwód pierścienia wynosi $2\pi r$ więc pełny obrót

płaszczyzny wahań: $T_0(\omega r \sin \phi) = 2\pi r$

Stąd okres obiegu:

$$T_0 = \left(\frac{2\pi r}{\frac{2\pi}{T} r \sin \phi} \right) = \frac{T}{\sin \phi} = \frac{24h}{\sin \phi}$$

Miejsce	Miasto	L [m]	M [kg]
Wydział Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza	Poznań	10	52
Centrum Nauki Kopernik	Warszawa	15	242
Politechnika Śląska – Centrum Nowych Technologii	Gliwice	22	55
Dziedziniec Politechniki Gdańskiej	Gdańsk	26	64
Wieża Radziejowskiego – dawna dzwonnica	Frombork	28,5	46
Zamek książąt Pomorskich – Wieża Dzwonów	Szczecin	28,5	76
Kościół św. Piotra i Pawła	Kraków	46,5	25



*Pokaz wahadła Foucaulta ściga liczną rzeszę zainteresowanych... obrotem ziemi,
Foto „Dziennik Polski”*

