

Wykład 11: Grawitacja cz.2



dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

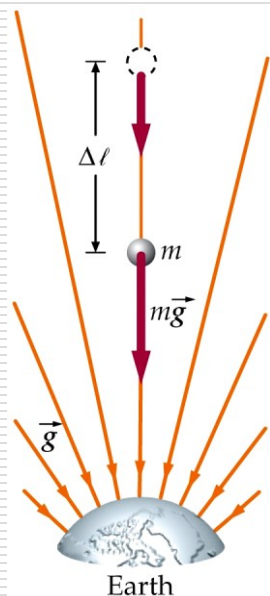
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Siły centralne

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{r} = \frac{C}{r^3} \vec{r} \quad F = \frac{C}{r^2}$$

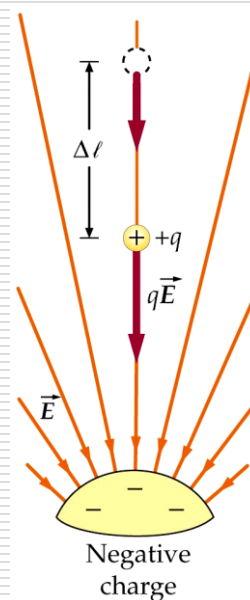
- Dla oddziaływań grawitacyjnych

$$C = -Gm_1m_2$$



- Dla oddziaływań elektrostatycznych

$$C = k \cdot q_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$



Wielkości charakteryzujące pole grawitacyjne

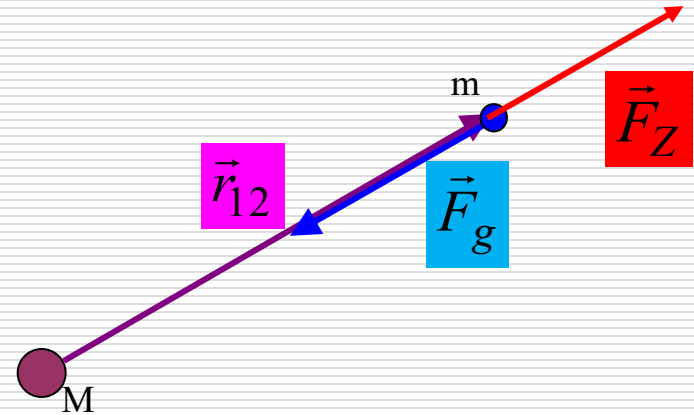
□ Siła grawitacji $\vec{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \hat{r}$

□ Natężenie pola $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$

□ Energia potencjalna:

Obliczmy pracę wykonaną **przez siłę zewnętrzną** przy przesunięciu ciała z $r \rightarrow \infty$.

Aby nie zmieniać energii kinetycznej, ciało jest przesuwane przez siłę zewnętrzną F_z skierowaną **przeciwnie** do siły grawitacji i co do wartości $F_z = F_g$



$$W_Z = \int_r^\infty \vec{F}_Z \circ d\vec{r} = GMm \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{r}$$

Zatem $W_z = \frac{GMm}{r} = \Delta E_p$ $\Delta E_p = E_{p\infty} - E_{pr} = W_z = 0 - E_{pr}$

$E_p \stackrel{df}{=} W_{g(\infty \rightarrow r)} = W_{z(r \rightarrow \infty)}$ stąd $E_{pr} = -\frac{GMm}{r}$

Skoro $W_g = \int_\infty^r \vec{F}_g \circ d\vec{r} = -E_p$ więc: $F_g = -\frac{dE_p}{dr}$

Dla przypadku 3D można zapisać: $\vec{F}_g = -\left(\hat{i} \frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$

$$\vec{F}_g = -\vec{\nabla} E_p$$

gdzie $\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$ $\vec{F}_g = -\mathbf{grad} E_p$

□ Potencjał grawitacyjny

$$E_{pr} = -\frac{GMm}{r}$$

$V = \frac{dE_p}{m} \Rightarrow V = -\frac{GM}{r}$ skoro $-\vec{\nabla}E_p = \vec{F}_g$ zatem

$-\vec{\nabla}E_p = -\vec{\nabla}mV = -m\vec{\nabla}V = m\vec{g}$

$$-\vec{\nabla}V = \vec{g}$$

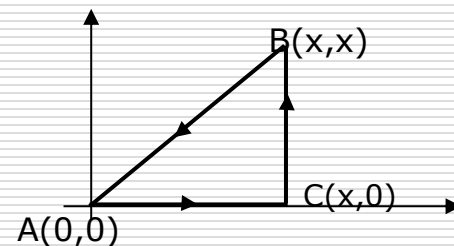
czyli

$$\vec{g} = -\mathbf{grad} V$$

oraz poprzednio

$$\vec{F}_g = -\mathbf{grad} E_p$$

Przykład (patrz wykład – „Praca”)



Dane jest pole wektorowe o składowych $F_x = Ky$; $F_y = Kx$; $F_z = 0$; gdzie K jest stałą, działające na masę m . Sprawdzono, że jest to pole jest zachowawcze. Czy istnieje potencjał tego pola $V(x,y)$? Jeśli tak, to ile on wynosi?

Rozwiązanie: skoro $\vec{F} = -\nabla E_p = -m\nabla V$

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -m \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-1}{m} F_x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-1}{m} F_y$$

$$\text{więc} \quad V = \frac{-1}{m} \int_{(0,0)}^{(x,0)} F_x dx = \frac{-1}{m} \int_{(0,0)}^{(x,0)} Ky dx = \frac{-1}{m} Kxy$$

$$\text{oraz} \quad V = \frac{-1}{m} \int_{(0,0)}^{(0,y)} F_y dy = \frac{-1}{m} \int_{(0,0)}^{(0,y)} Kx dy = \frac{-1}{m} Kxy$$

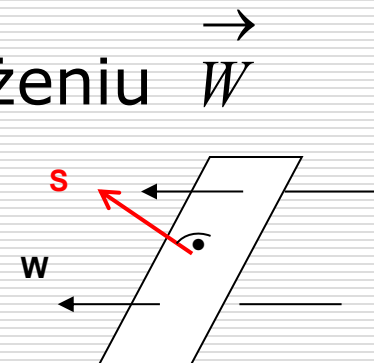
$$\Rightarrow V = -\frac{Kxy}{m}$$

Prawo Gaussa



- Strumień pola wektorowego o natężeniu $\vec{W}$ przechodzący przez powierzchnię S

$$\Phi = \vec{W} \circ \vec{S}$$



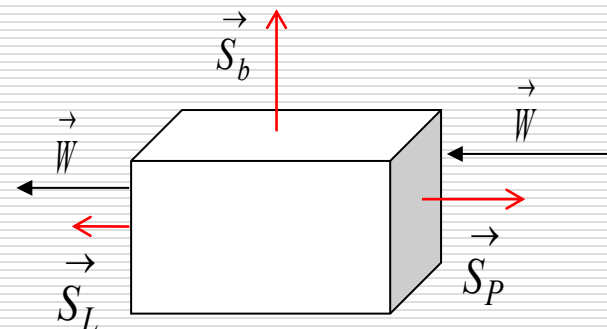
- Dla powierzchni złożonej

$$\Phi_c = \sum_i \Phi_i \quad \text{lub ogólnie dla powierzchni}$$

$$\text{zamkniętej} \quad \Phi = \oint \vec{W} \circ d\vec{S}$$

w przypadku jak na rysunku

$$\Phi_c = 0$$



Całkowity strumień pola wektorowego, przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do źródła tego pola zamkniętego wewnątrz tej wybranej powierzchni

□ Dla pola grawitacyjnego:

Całkowity strumień pola grawitacyjnego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą (tzw. powierzchnię Gaussa), jest proporcjonalny do masy będącej źródłem tego pola – masy, która jest zamknięta wewnątrz powierzchni Gaussa.

$$\Phi_g = -4\pi G \cdot M$$

gdzie $\Phi_g = \oint \vec{g} \circ \vec{dS}$

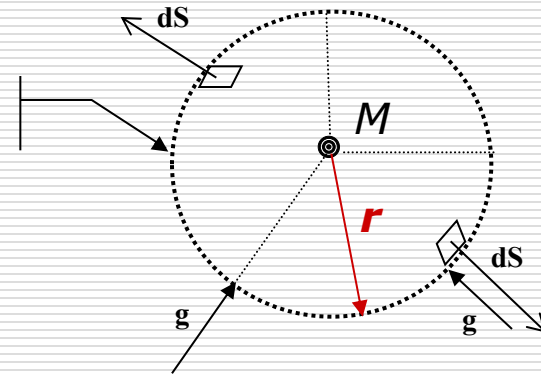
czyli ostatecznie

$$\oint \vec{g} \circ \vec{dS} = -4\pi GM$$

PRZYKŁADY:

□ Masa punktowa:

Powierzchnia Gaussa



$$\Phi_{\vec{g}} = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s} = \oint_S |\vec{g}| |d\vec{s}| \cos 180^\circ = - \oint_S g ds$$

$$\Phi_{\vec{g}} = -g \oint_S ds = -g 4\pi r^2$$

Skoro: $\Phi_g = -4\pi GM$

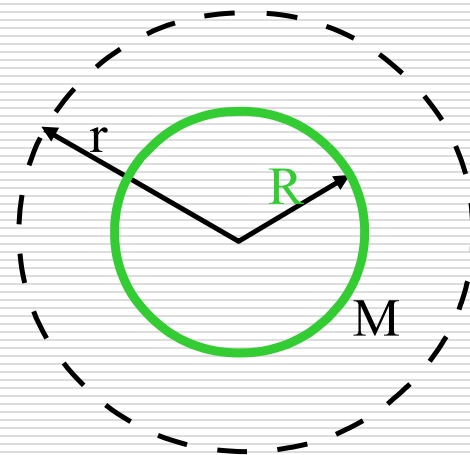
$$g = G \frac{M}{r^2}$$

$$F_g = m \cdot g = G \frac{Mm}{r^2}$$

- Sferyczny rozkład masy
masa M rozłożona na sferze o
promieniu R

gęstość powierzchniowa
masy:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$



1. rozpatrujemy pierwszy obszar $r > R$

Na podstawie prawa Gaussa $-4\pi GM = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s}$

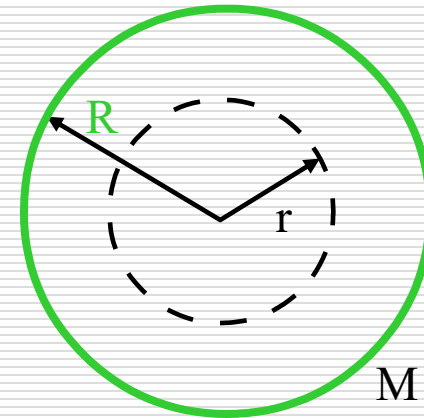
gdzie M jest masą powłoki zawartej wewnątrz powierzchni Gaussa.

$$-4\pi GM = -g4\pi r^2 \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \quad g = \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2} = G \frac{M}{r^2}$$

2. Dla drugiego obszaru $r < R$

$$0 = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s} \Rightarrow g = 0$$

gdyż żadna masa nie jest zawarta
wewnątrz wybranej powierzchni
Gaussa.



□ Objętościowy rozkład masy –
kula o promieniu R i masie M .

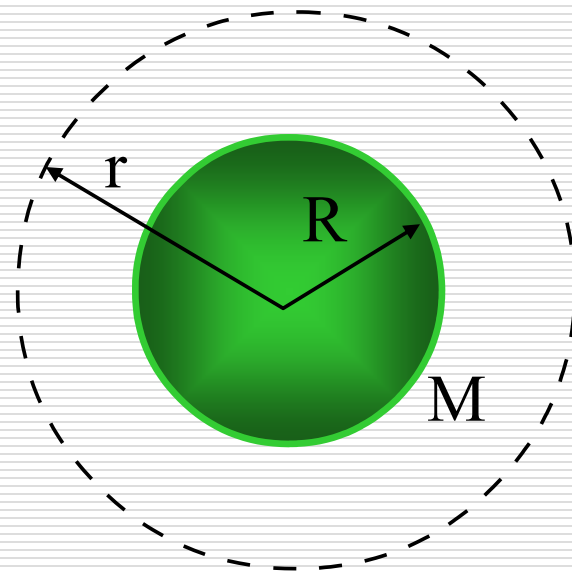
1. pierwszy obszar $r > R$ (cała masa kuli zawarta jest wewnątrz powierzchni Gaussa).

$$-4\pi GM = \oint_S \vec{g} \circ d\vec{s}$$

$$-4\pi GM = -g4\pi r^2 \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

Można stąd obliczyć potencjał i energię potencjalną masy próbnej m znajdującej się w odległości r od źródła pola grawitacyjnego M .

$$V = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r}$$



2. dla $r < R$ tylko część masy kuli zawarta jest wewnątrz powierzchni Gaussa.

Na podstawie prawa Gaussa:

$$-4\pi GM' = \oint \vec{g} \circ d\vec{S} \Rightarrow -4\pi GM' = -g4\pi r^2$$

$$\Rightarrow g = \frac{GM'}{r^2} \quad \text{Obliczmy } M' :$$

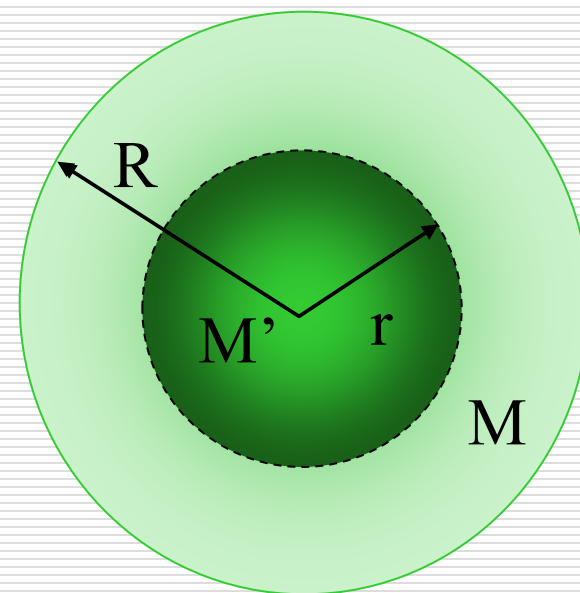
$$\frac{M'}{V'} = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M' = M \frac{r^3}{R^3} \quad \text{stąd} \quad g = \frac{GMr}{R^3}$$

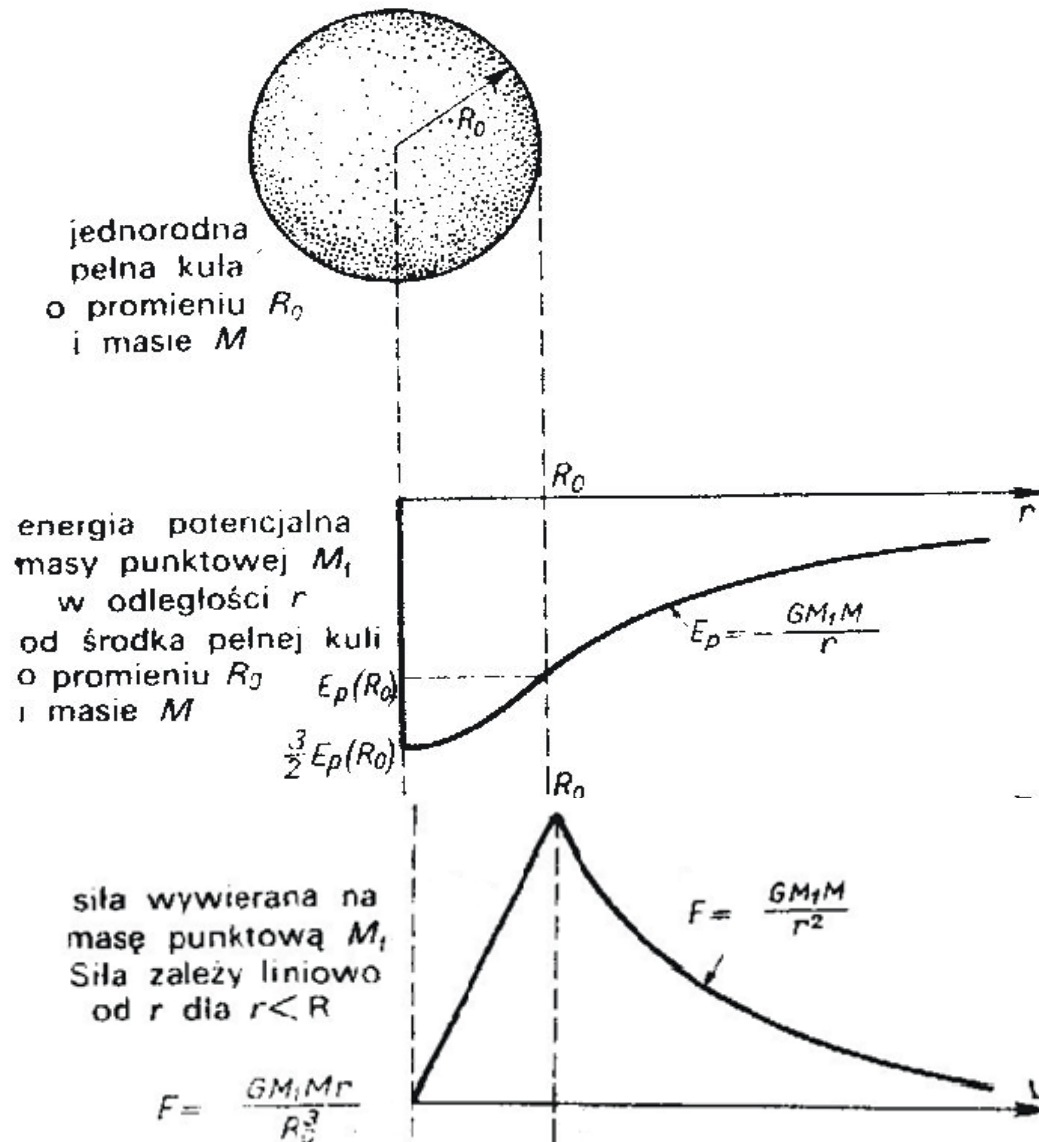
Dla obu obszarów otrzymujemy ten sam wynik gdy $\mathbf{r} = \mathbf{R}$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

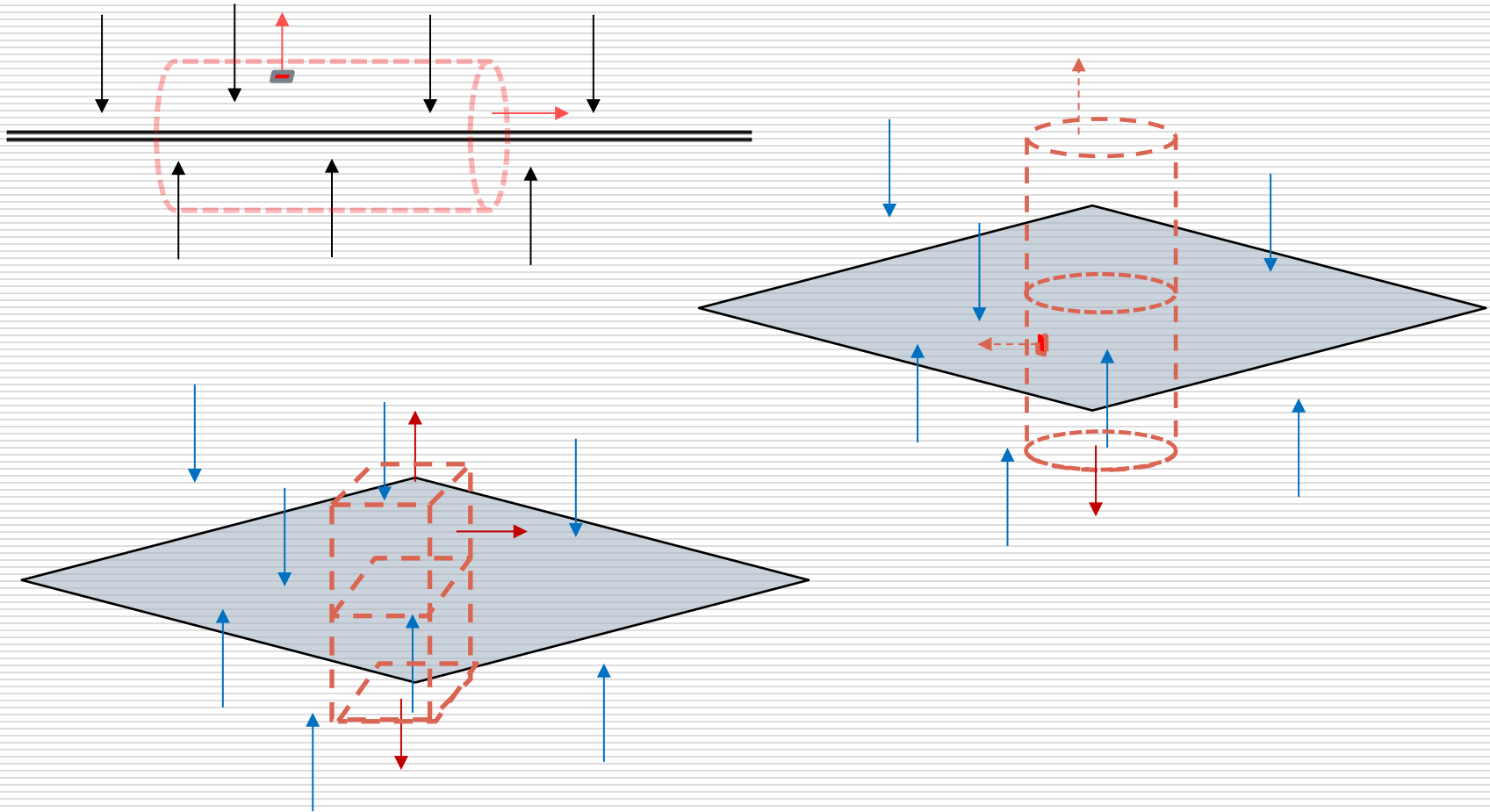
Podobnie jak poprzednio:

$$V = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{R^3} \frac{r^2}{2}$$





□ Liniowy i powierzchniowy rozkład masy

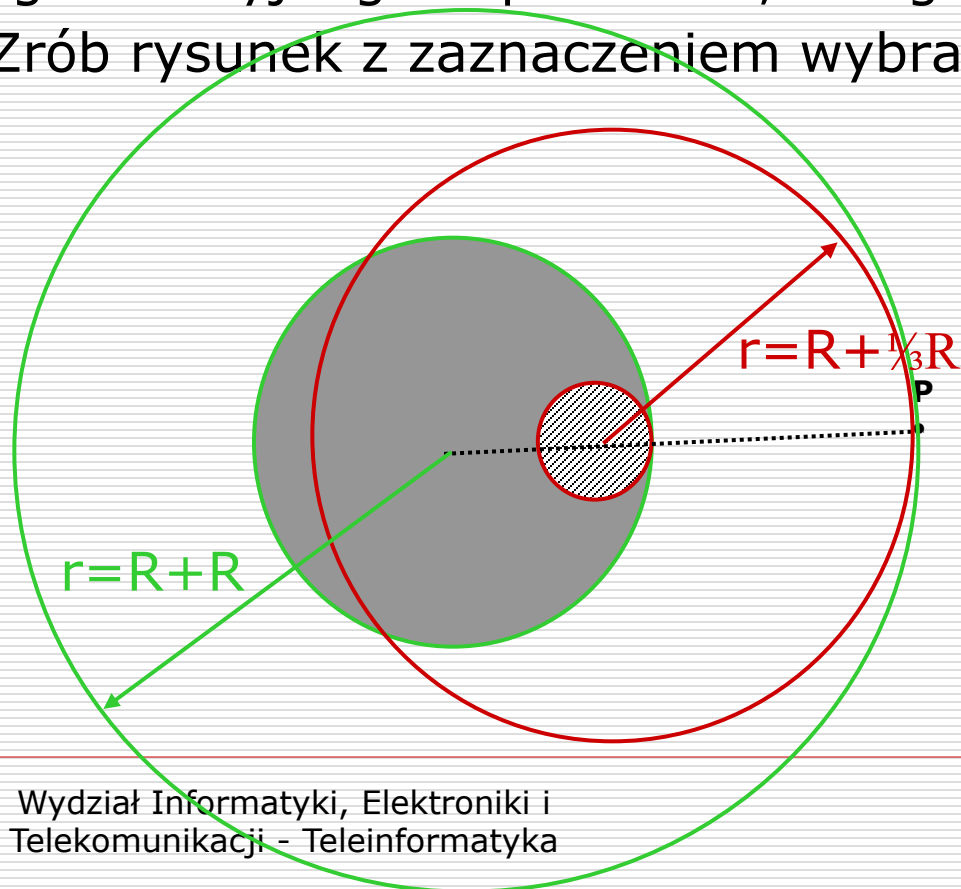


Wielkości charakteryzujące	Oddziaływanie pomiędzy masami punktowymi	Pole grawitacyjne	Prawo Gaussa
Siła	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$		
Energia potencjalna	$E_p = G \frac{m_1 m_2}{r}$		
Natężenie		$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	
Potencjał		$V = \frac{E_p}{m}$	
			$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \cdot m$

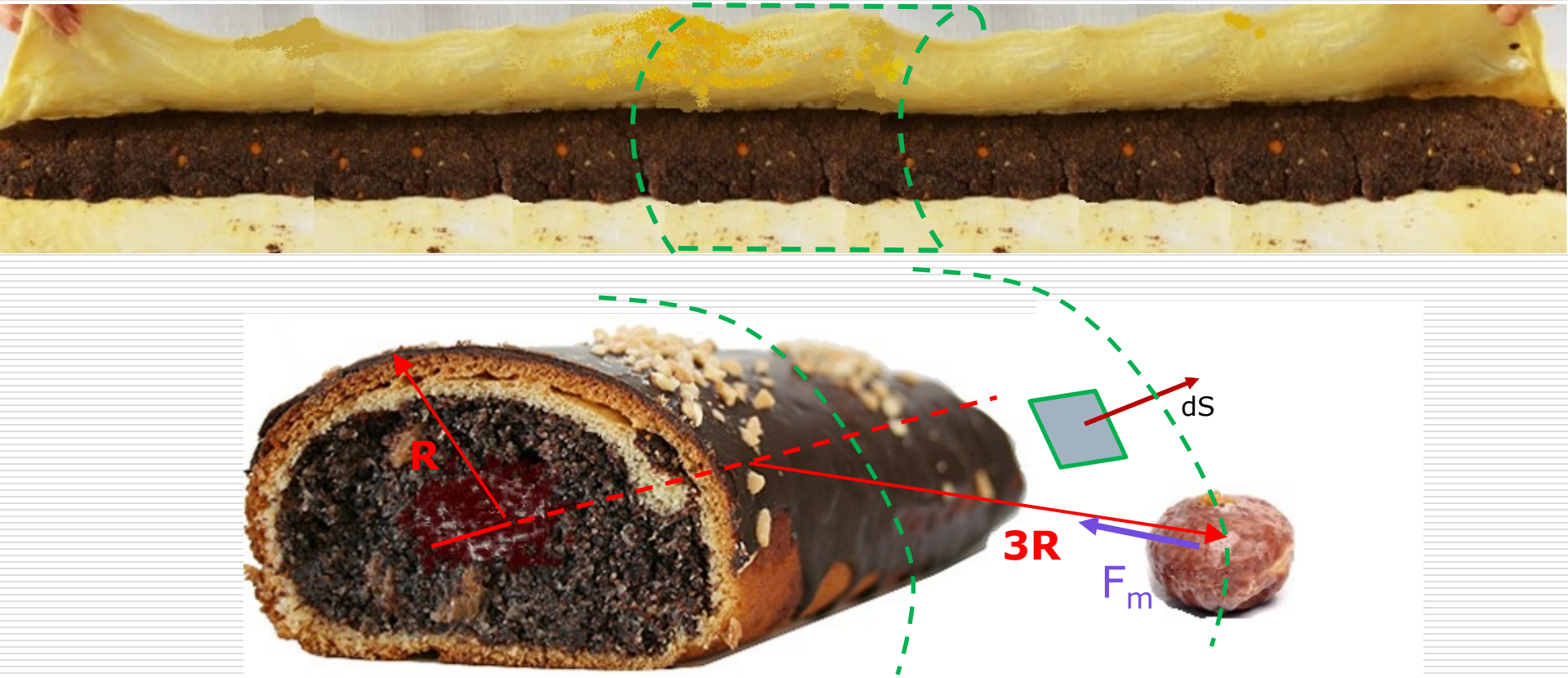
□ Inny przykład zastosowania prawa Gaussa.

W jednorodnej kuli o promieniu R , wykonanej z materiału o gęstości ρ_1 , wykonano kuliste wydrążenie o promieniu $r = \frac{1}{3}R$ przylegające do powierzchni kuli. Wydrążenie wypełniono materiałem o gęstości $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$. Korzystając z prawa Gaussa oblicz natężenie pola grawitacyjnego w punkcie P, odległości R od powierzchni kuli. Zrób rysunek z zaznaczeniem wybranych powierzchni Gaussa.

$$g = \frac{23}{72} \pi G R \rho_1$$

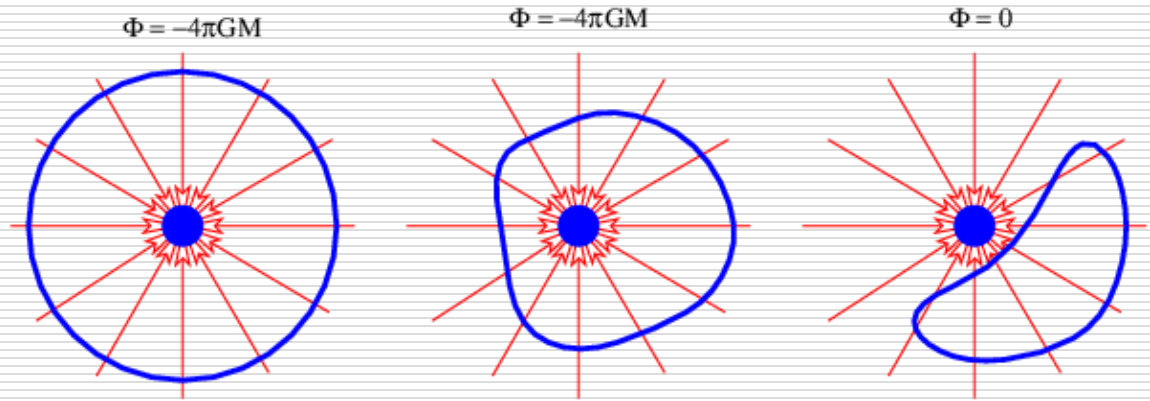


Uczeń cukiernika upiekł makowiec w kształcie bardzo, bardzo długiego, idealnego walca - niestety z zakalcem. Gęstość tego makowca o promieniu R można opisać w uproszczeniu funkcją $\sigma = A(1-r/R)$, gdzie A - stała makowcowa. Z jaką siłą przyciąga ten makowiec punktowy pączek o masie m umieszczony w odległości $3R$ od osi makowca ?



Podsumowanie – własności powierzchni Gaussa

- Powierzchnia Gaussa jest tworem hipotetycznym, matematyczną konstrukcją myślową,
- Jest dowolną powierzchnią zamkniętą, lecz w praktyce powinna mieć kształt związany z symetrią pola,
- Powierzchnię Gaussa należy tak poprowadzić aby punkt, w którym obliczamy natężenie pola grawitacyjnego leżał na tej powierzchni.



Energia grawitacyjna jednorodnej kuli

- Obliczamy energię oddziaływania pomiędzy pełną kulą o promieniu r a otaczającą ją powłoką kulistą o grubości dr i masie dM .
- Budowanie kuli będzie polegać na doklejaniu kolejnych zewnętrznych powłok. Praca potrzebna na „doklejenie” powłoki – przeniesienie jej z ∞ :

$$dW = -\frac{GMdM}{r}$$

masa tak tworzonej kuli i
powłoki jest równa
odpowiednio:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr$$

Całkowita praca potrzebna do utworzenia kuli:

$$W = \int dW = \int -\frac{GMdM}{r} = -\int_0^R G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho dr}{r} = -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr$$

$$W = -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}$$

W ten sposób obliczamy energię grawitacyjną gwiazd i planet.

□ Przykładowo, grawitacyjna energia własna Słońca:

$$W = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}$$

$$M_s = 2 \cdot 10^{30} kg \quad R_s = 7 \cdot 10^8 m$$

$$E_p \text{ Słońca} \approx -\frac{3}{5} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \approx -2,3 \cdot 10^{41} J$$

Jest to bardzo duża ilość energii i jest oczywiste, że w procesie grawitacyjnego zapadania się gwiazdy (do stadium białego karła o promieniu ok. 0,1 obecnego promienia Słońca) wyzwoli się ogromna ilość energii.