

Wykład 4: Dynamika

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

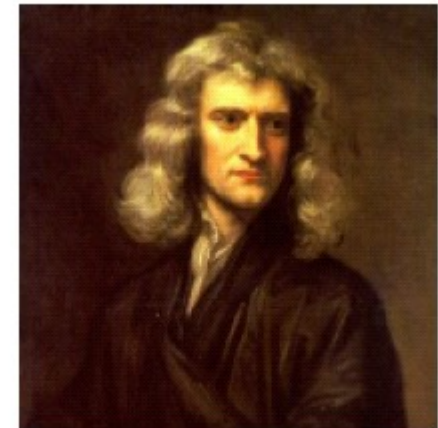
<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Przyczyny ruchu - zasady dynamiki dla punktu materialnego



Jeśli ciało znajduje się we właściwym miejscu, to jego ruch jest możliwy jedynie pod wpływem działania sił zewnętrznych. Z wyjątkiem ciał niebieskich stanem normalnym jest stan spoczynku.

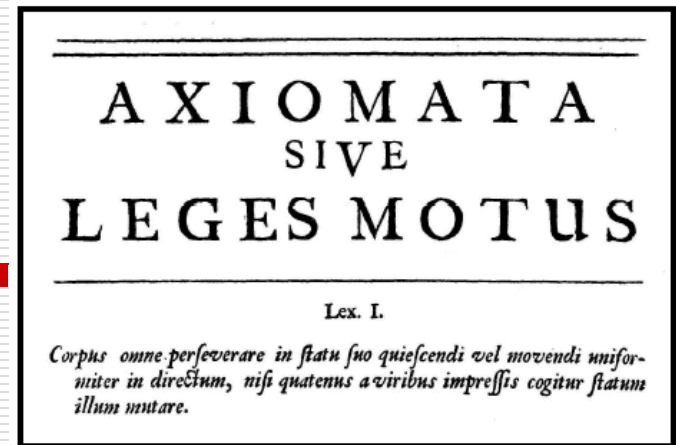
„Każde ciało trwa w swym stanie: spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.”



1642-1727
Isaac Newton

*Principia Mathematica Philosophiae
Naturalis*

1687 – zasady dynamiki



Istnieje **układ inercjalny** – tzn. układ odniesienia, w którym ciało, na które nic nie działa, spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.

Zasada bezwładności Newtona jest postulatem istnienia układu inercjalnego.

Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością $\mathbf{V} = \mathbf{const}$ jest też układem inercjalnym; istnieje więc nieskończenie wiele układów inercjalnych

Druga zasada dynamiki

Niezerowa wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało nadaje ciału przyspieszenie o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej oraz wartości wprost proporcjonalnej do wartości tej siły a odwrotnie proporcjonalnej do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{wyp}}}{m}$$

stąd $\vec{F}_w = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

Czyli jeśli znamy rozkład sił i masę ciała oraz warunki początkowe dla położenia i prędkości, to rozwiązując równanie ruchu otrzymamy układ trzech równań skalarnych, opisujących zachowanie ciała w czasie:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

Przykład 1:

Obliczyć wartość siły hamowania koniecznej do zatrzymania na odcinku 55 m samochodu o masie 1500 kg jadącego z szybkością 100 km/h.

Rozwiązanie:

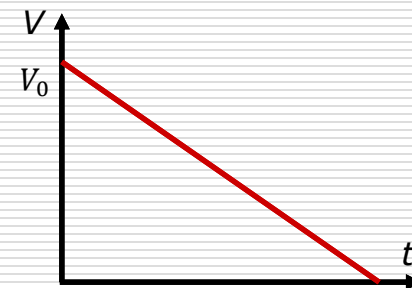
$$100 \text{ km/h} \approx 27,8 \text{ m/s}$$

$$S = \frac{1}{2} V_0 t \Rightarrow t = \frac{2S}{V_0}$$

oraz $a = \frac{V_0}{t}$ gdzie a – opóźnienie !!

$$a = \frac{V_0^2}{2S} \Rightarrow a = 7,03 \text{ m/s}^2$$

$$F = m \cdot a = 10\,538,7 \text{ N} - \text{siła hamująca} !$$



Przykłady równań Newtona:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \quad \text{Ruch ładunku w polu magnetycznym}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} \quad \text{Ruch ładunku w polu elektrycznym}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} \quad \text{Ruch masy w polu grawitacyjnym}$$

Uogólniona II zasada dynamiki:

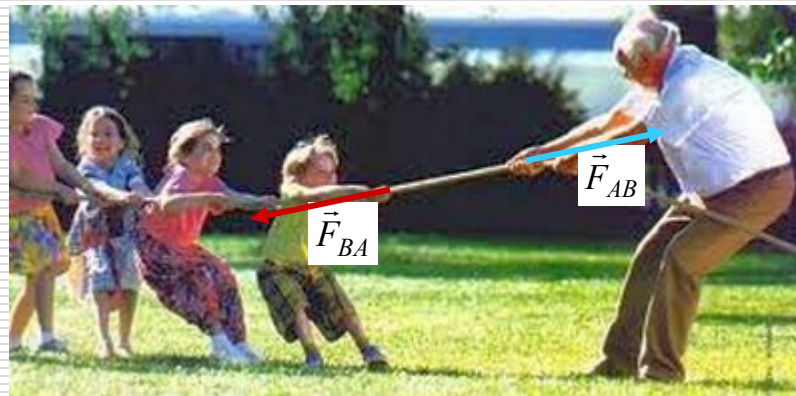
Jeżeli $m = \text{const}$ to

$$\vec{F}_w = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Trzecia zasada dynamiki Newtona



Każdemu działaniu (akcji) towarzyszy przeciwdziałanie (reakcja)



Siła działająca na ciało A ze strony ciała B (F_{AB}) jest równa sile działającej na ciało B ze strony ciała A (F_{BA}).

Siły te występują parami. Czy one się równoważą ?

Nie! Każda siła działa na inne ciało !

Przykład 2:

Jeżeli brak jest siły zewnętrznej (układ izolowany)

$$F_w = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = \text{const} \quad (\text{zasada zachowania pędu})$$

Samochód o masie m porusza się poziomo, prostoliniowo z szybkością V i zderza się czołowo z ciężarówką o masie $3m$ jadącą z szybkością $\frac{1}{2} V$. W wyniku zderzenia ciężarówka zatrzymała się, a samochód osobowy został odrzucony wstecz.

Oblicz jaka część początkowej energii samochodów wydzielita się w wyniku zderzenia.

Rozpatrz pierwszą sytuację, gdy ciężarówka ma masę $5m$. Zinterpretuj wynik tych obliczeń.

Przykład 3:

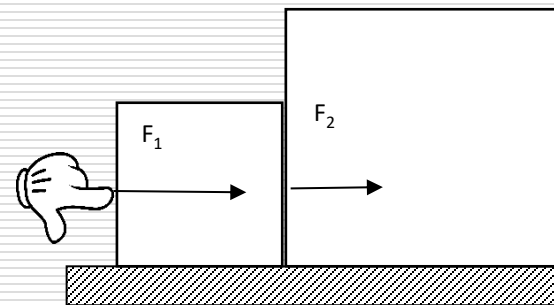
Z wysokości h nad ziemią spada swobodnie kula z gliny o masie M . Na wysokości $h/2$ trafił ją w środek, poruszający poziomo się z prędkością V_0 pocisk o masie m , który utkwiał w kuli.

Oblicz szybkość kuli po wbiciu się w nią pocisku.

Dane g .

Przykład 4:

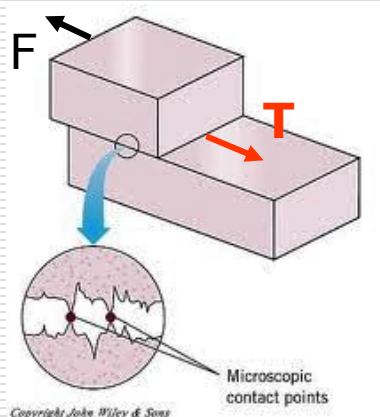
Dwa klocki o masach $m_1 = 0,40$ kg i $m_2 = 0,60$ kg zetknięte ze sobą poruszają się bez tarcia po gładkiej powierzchni pod działaniem siły $F_1 = 2$ N. Siła ta jest przyłożona do mniejszego z klocków.



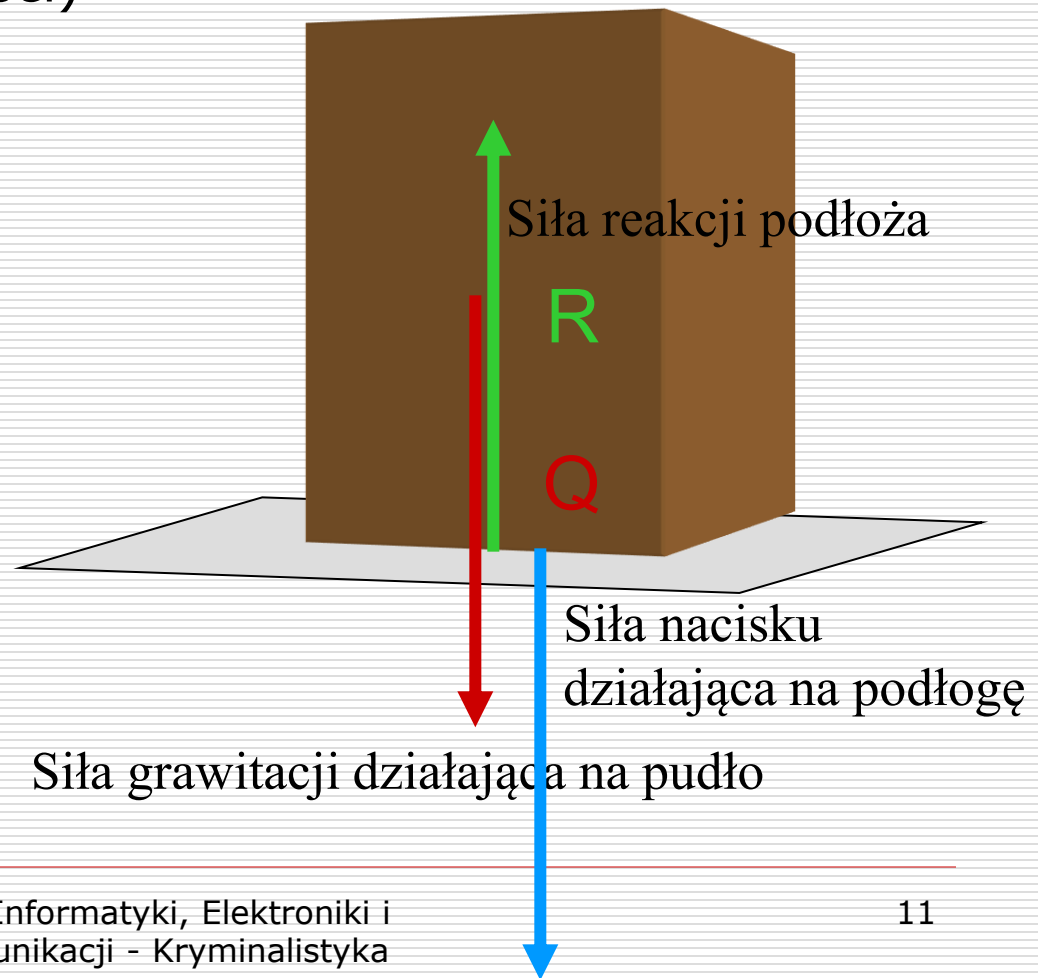
- a) Oblicz przyspieszenie klocka m_1 .
- b) Oblicz z jaką siłą F_2 jest popychany większy klocek.
- c) Podaj z jaką siłą klocek większy oddziałuje na mniejszy.

Przykłady istotnych sił rzeczywistych

- ❑ Siła grawitacji (ciężkości)
- ❑ Siła nacisku/reakcji
- ❑ Siła naprężenia
- ❑ Siła tarcia (oporu)

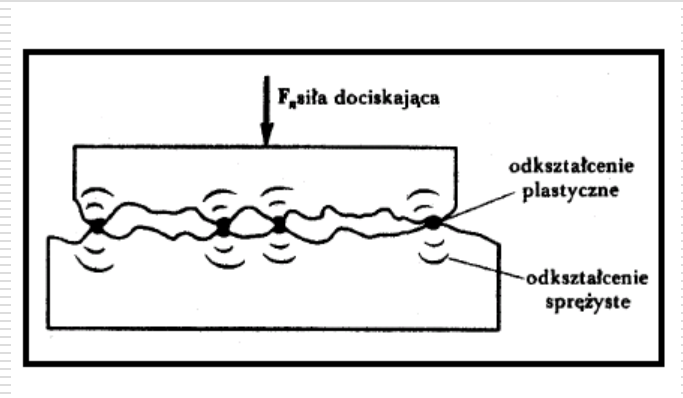


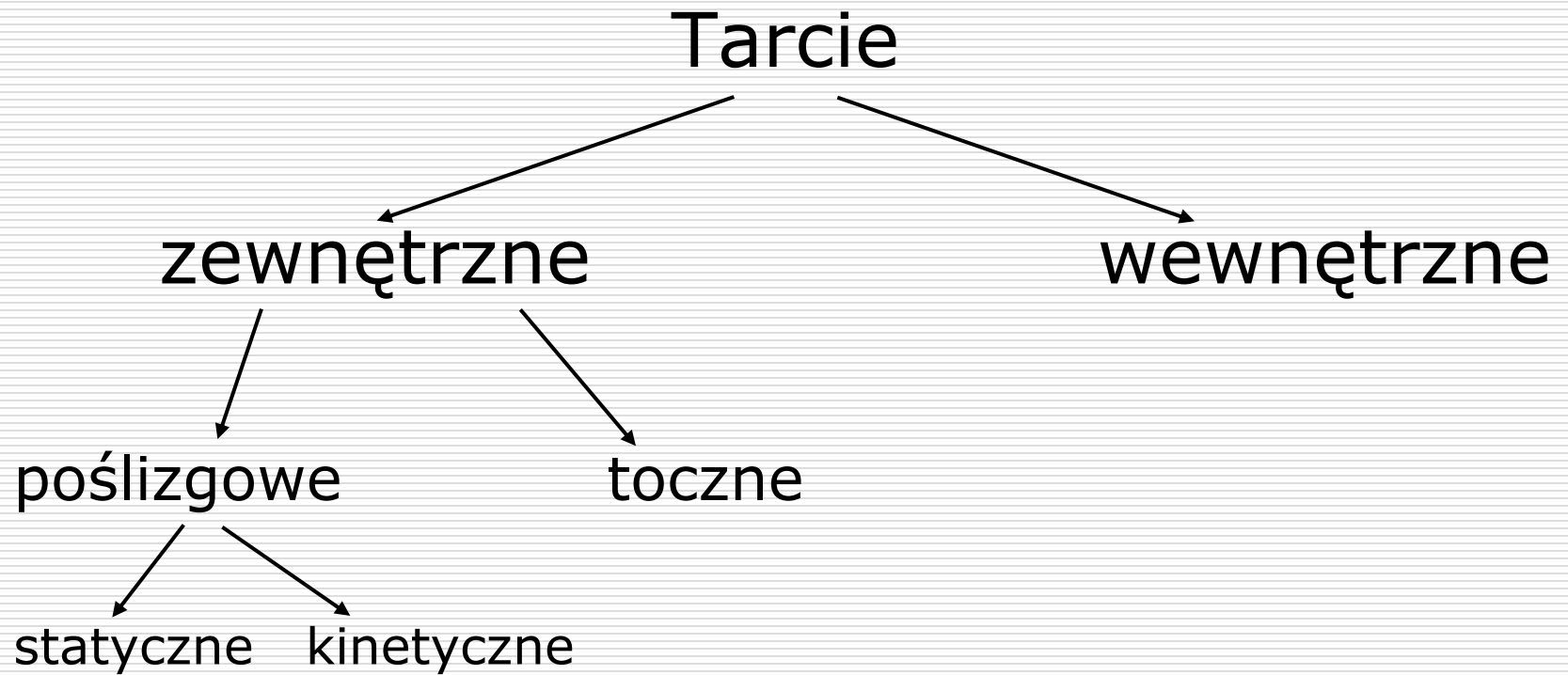
- ❑ Siła dośrodkowa



Tarcie

- ❑ Źródłem siły tarcia jest oddziaływanie pomiędzy ciałem a powierzchnią, po której jest wprowadzane w ruch.
- ❑ Tarcie jest powodowane przez oddziaływanie elektromagnetyczne między cząstkami/atomami stykających się ciał.
- ❑ Siła tarcia jest sumą wektorową sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała.
- ❑ Powierzchnia rzeczywistego kontaktu mikroskopowego obu ciał może być nawet 10 000 razy mniejsza od powierzchni pozornego makroskopowego kontaktu.



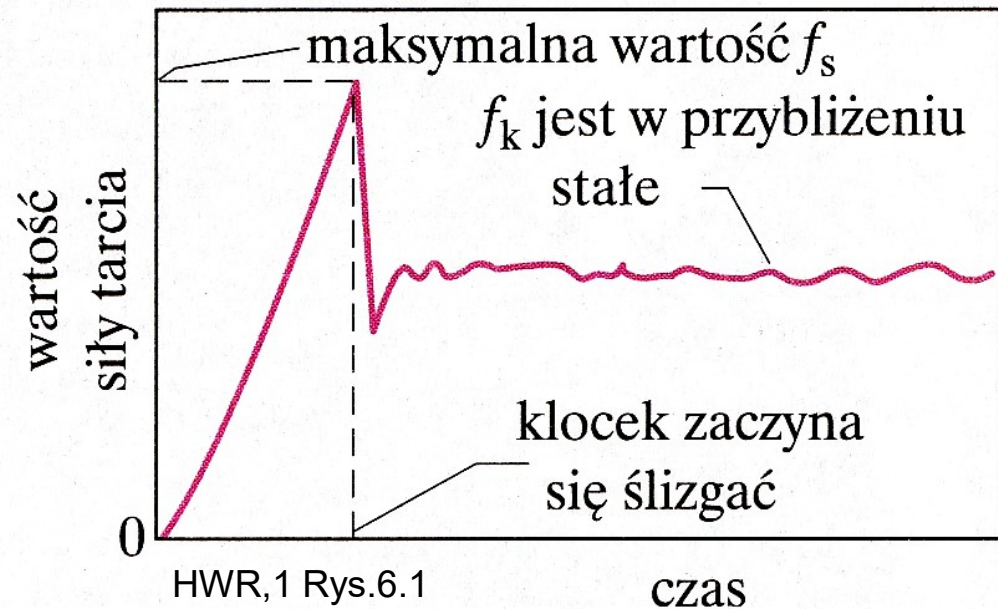


Właściwości siły tarcia

1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego równoważy składową siły równoległą do powierzchni. Siła tarcia statycznego dopasowuje się do siły usiłującej wprowadzić ciało w ruch.
2. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego dana jest wzorem $T_{S_{\max}} = \mu_s N$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, N jest wartością siły nacisku - prostopadłej do powierzchni, równej sile reakcji działającej na ciało.
3. Jeżeli wartość składowej siły F , równoległej do powierzchni przekracza wartość $T_{S_{\max}}$ to ciało zaczyna się ślizgać. Wartość siły tarcia gwałtownie wówczas maleje do $T_k = \mu_k N$, gdzie μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego

Przykładowe współczynniki tarcia:

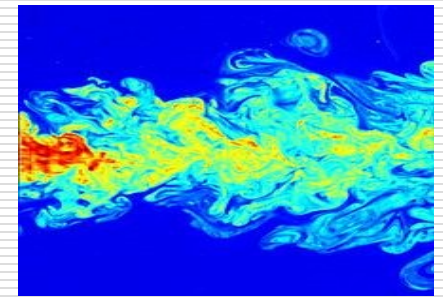
Materiał	Wsp. tarcia statycznego μ_s	Wsp. tarcia kinetycznego μ_k
stal / stal	0.6	0.4
po dodaniu smaru do stali	0.1	0.05
metal / lód	0.022	0.02
opona / sucha nawierzchnia	0.9	0.8
opona / mokra nawierzchnia	0.8	0.7



Tarcie toczone

- ❑ wynika ono z braku symetrii oddziaływań w obszarze styku,
- ❑ siła reakcji podłoża nie przypada w miejscu działania nacisku lecz jest przesunięta w kierunku toczenia i jest odchylona od pionu,
- ❑ przy toczeniu tworzą się i rozrywają połączenia mostkowe (adhezyjne) między ciałami (*ważne w F1 !*),
- ❑ następuje deformacja plastyczna w miejscu styku ciał.
 - opona z większą zawartością siarki – mniejsze opory toczenia!
 - wpływ ugięcia ścian opony - szersze mają mniejsze ugięcie - mniejsze opory
 - gruba rzeźba bieżnika – większy opór
 - większy rozmiar koła – mniejszy opór
 - ciśnienie w oponie – większe, to mniejszy opór ale straty energii przy „przeskoku” nad nierównościami

Tarcie wewnętrzne – lepkość



- Lepkość to opór, powstający pomiędzy warstwami (strugami) cieczy lub gazu przemieszczającymi się względem siebie.
- Rodzaj przepływu określa liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{v \rho L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$$

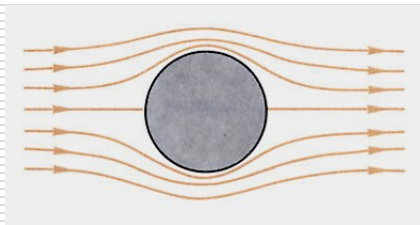
V – prędkość; ρ – gęstość

L – charakterystyczny rozmiar ciała

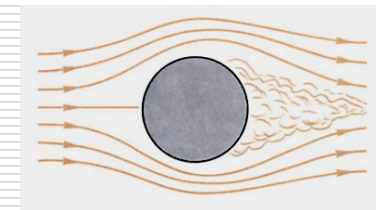
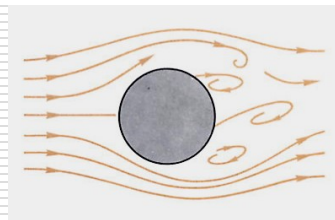
η – współ. lepkości (dynamiczny) $[Pa \cdot s]$

ν – współ. lepkości (kinematyczny)

$$\left[\frac{m^2}{s} \right]$$



przepływ
laminarny
 $Re \ll 1$



przepływ
turbulentny
 $Re > 2000$

□ Prędkość graniczna



$$V_{gr} = \sqrt{\frac{2F_g}{C \cdot \rho \cdot S}}$$

C – współ. oporu

ρ - gęstość ośrodka

S - pole przekroju

$$V_{gr} = \frac{(m_k - m_p) \cdot g}{6\pi\eta r}$$

prędkość
graniczna
kulki $\Leftarrow$

□ Siła Stokes'a

Kulka o promieniu r porusza się w ośrodku lepkim (mała liczba Reynoldsa)

$$F_o = 6\pi\eta rV$$

$$F_w = m_p \cdot g$$

$$F_g = m_k \cdot g$$

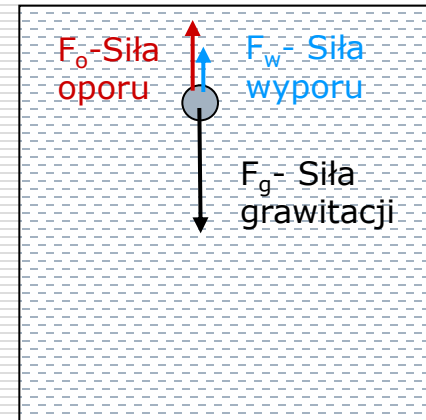
gdzie:

m_p - masa płynu

wypartego przez kulkę

m_k - masa kulki

Równanie ruchu kulki:



$$m_k \frac{dV}{dt} = m_k \cdot g - m_p \cdot g - 6\pi\eta r \cdot V$$

Przykład 5:

Kierowca samochodu jadącego z szybkością V zobaczył nagle przed sobą szeroki mur.

Co powinien zrobić aby uniknąć zderzenia – zahamować czy skręcić zataczając łuk? Współczynnik tarcia kół o jezdnię wynosi μ .

Rozwiązanie:

Siła tarcia: $F = mg\mu$ odległość przebyta przy hamowaniu podczas jazdy na wprost:

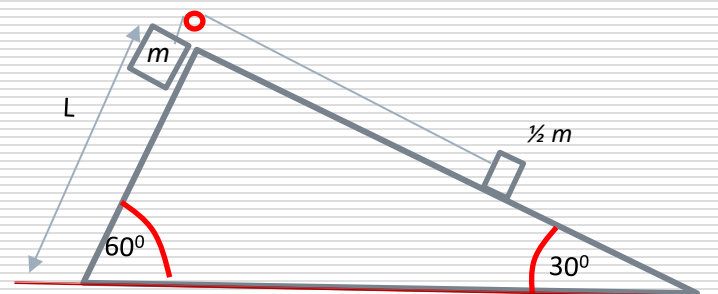
$$S = \frac{V^2}{2g\mu}$$

Promień najciaśniejszego zakrętu zależy od - siły tarcia, która nadaje przyspieszenie dośrodkowe:

$$R = \frac{V^2}{g\mu} \quad \Rightarrow \quad S < R ! \quad (\text{przy założeniu jednakowego } \mu)$$

Przykład 6:

Dwie masy: m oraz $\frac{1}{2}m$ połączone nieważką nicią spoczywają na bokach równi pochyłej nachylonych pod kątami odpowiednio: $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 30^\circ$ oraz długości krótszego zbocza $L = 0,5 \text{ m}$ – jak na rysunku. Współczynnik tarcia mas o równię wynosi $1/3$. Opory nici na krążku są do zaniedbania.



- a) oblicz po jakim czasie większa masa uderzy w podłoże,
- b) oblicz jaką szybkość uzyska wówczas mniejsza masa.

Odp.:

$$T = 0,7 \text{ s}$$

$$V = 1,42 \text{ m/s}$$

Dynamika w układach nieinercjalnych

ZASADY DYNAMIKI NEWTONA OBOWIĄZUJĄ W UKŁADACH INERCJALNYCH !!

Co można zrobić aby móc stosować te zasady w układach nieinercjalnych?

Siły pozorne,

Siły bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

przyspieszenie układu

II zasada dynamiki:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{rz} + \vec{F}_b = m\vec{a}$$

Przykład – ciężar pozorny

Winda rusza w górę ze stałym przyspieszeniem a . Jaki ciężar wskaże waga sprężynowa?

Układ Inercjalny

$$F_R - F_g = a_u \cdot m$$

waga wskazuje siłę F_N - nacisku

ale $F_R = F_N$

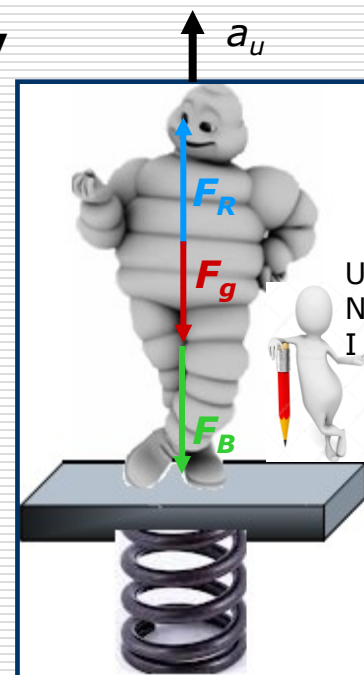
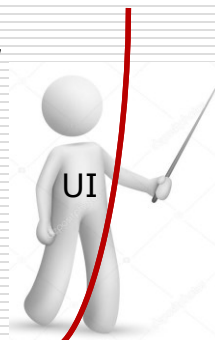
$$F_N = F_g + m \cdot a_u$$

Układ Nie Inercjalny

$$F_R - F_g - F_B = 0$$

$$F_B = m \cdot a_u$$

więc



Dynamika w ruchu po okręgu

Rotor

Obserwator w układzie
inercyjnym
wskaże

Siły rzeczywiste:

siła grawitacji

siła reakcji na nacisk

siła tarcia

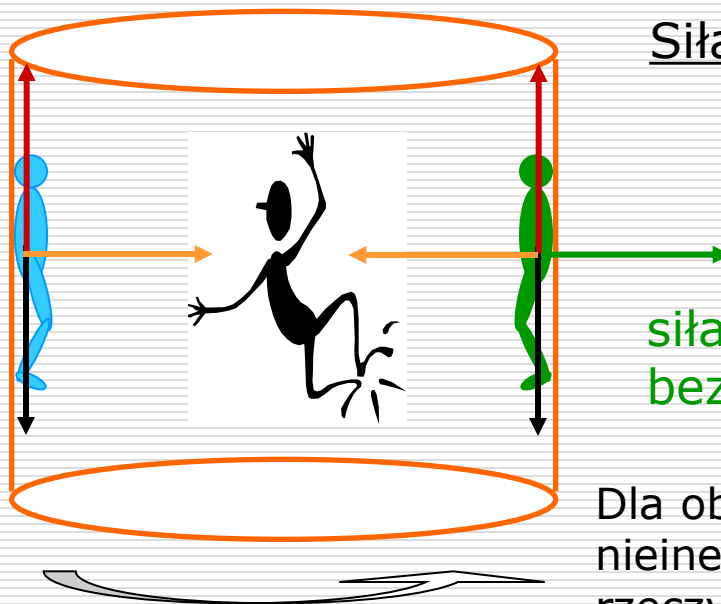
Dla obserwatora w
układzie inercyjnym
siła reakcji na nacisk
pełni rolę siły
dośrodkowej

Obserwator w układzie
nieinercyjnym

Siła pozorna:

siła odśrodkowa
bezwładności

Dla obserwatora w układzie
nieinercyjnym wszystkie siły:
rzeczywiste i siła odśrodkowa
(bezwładności) się
równoważą



Czy Ziemia jest układem inercjalnym ?

Rotacja Ziemi wokół własnej osi



$$a_z \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Obieg wokół Słońca



$$a_o \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Obieg Słońca w Galaktyce



$$a_s \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$$

Z czym porównać oszacowane wartości przyspieszeń?

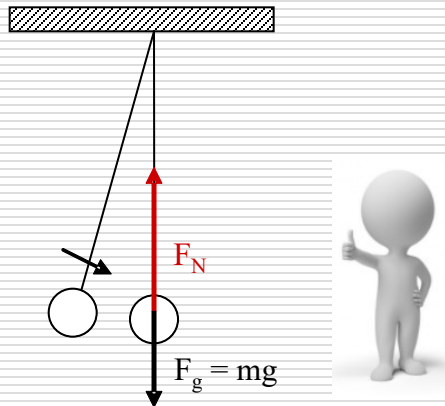
$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Wniosek?



Wahadło matematyczne

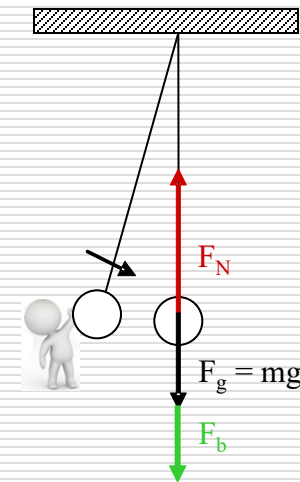
Układ inercjalny



$$\vec{F}_d = \vec{F}_N + \vec{F}_g \quad \text{czyli} \quad F_d = F_N - F_g$$

$$\frac{mV^2}{r} = F_N - mg \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{mV^2}{r} + mg$$

Układ nieinercjalny



$$\vec{F}_{wyp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_b = 0$$

$$\text{czyli} \quad F_N = F_g + F_b$$

$$F_N = mg + \frac{mV^2}{r}$$

Przykład 7:

Kulka o masie m jest zawieszona na nici o długości R i wiruje ze stałą szybkością w płaszczyźnie pionowej po okręgu tak, że w górnym położeniu nitka nie jest napięta.

- a) Zrób odpowiedni rysunek z zaznaczeniem sił działających na kulkę w górnym oraz w dolnym położeniu – w układzie inercyjnym i nieinercyjnym.
- b) Oblicz szybkość kulki w górnym położeniu.
- c) Oblicz ile razy naciąg nici w dolnym położeniu jest większy od ciężaru kulki ?

Przyspieszenie i siła Coriolisa

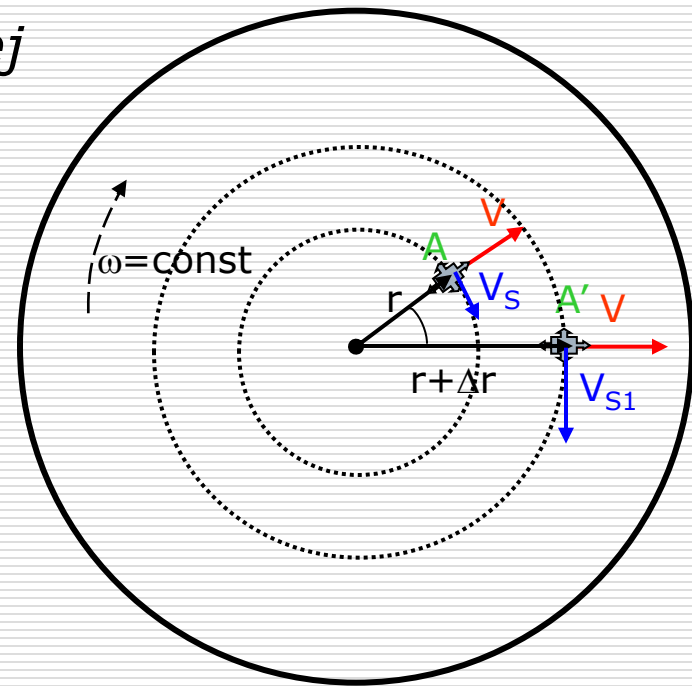
□ *Mrówka na płycie gramofonowej*

Płyta obraca się ze stałą prędkością kątową ω .

Mrówka porusza się względem płyty ruchem jednostajnym, prostoliniowym - wzdłuż promienia, z punktu A do punktu A' w czasie Δt z prędkością V .

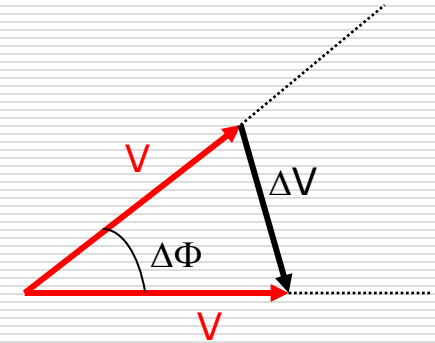
Prędkość styczna V_s rośnie wraz z odległością od środka płyty.

W tym czasie płyta obraca się o kąt $\Delta\varphi$



Skoro $\Delta\Phi$ jest małe to $\Delta V = V \cdot \Delta\Phi$

czyli $\frac{\Delta V}{\Delta t} = V \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ dla $\Delta t \rightarrow 0$ można zapisać:



$$\frac{dV}{dt} = V \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{czyli} \quad a_1 = V \cdot \omega$$

Prędkość V_S zmienia się od: $V_S = \omega \cdot r$
do wartości $V_{S1} = \omega \cdot (r + \Delta r)$

a więc $\Delta V_S = \omega \cdot (r + \Delta r) - \omega \cdot r$ czyli $\Delta V_S = \omega \cdot \Delta r \quad | : \Delta t$

otrzymujemy $\frac{\Delta V_S}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t}$ dla $\Delta t \rightarrow 0$ $\frac{dV_S}{dt} = \omega \frac{dr}{dt}$ czyli $a_2 = V \cdot \omega$

a_1 i a_2 to wartości wektorów o tym samym kierunku-wzrastającego ϕ

Całkowite przyspieszenie $a_C = a_1 + a_2 = 2V \cdot \omega \leftarrow \text{przyspieszenie Coriolisa}$

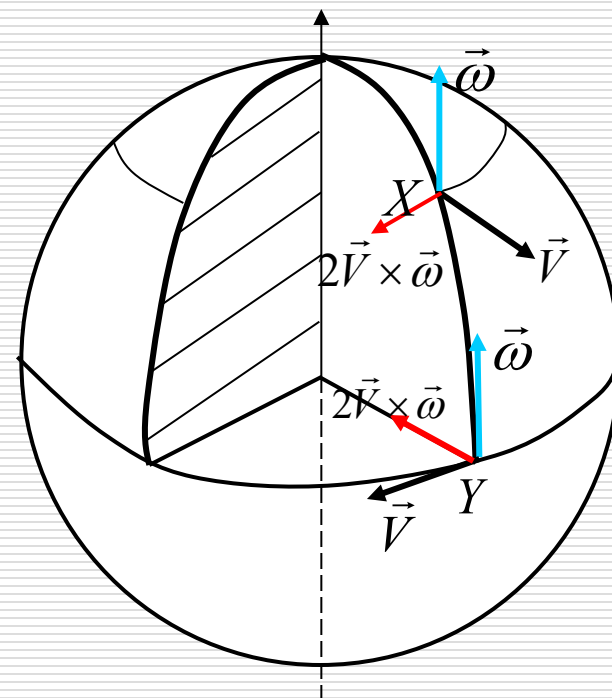
W układzie nieinercyjnym mrówka jest w stanie równowagi $\Rightarrow$

Tarcie działające na mrówkę ma dwie składowe:
 radialną – równoważona przez **siłę odśrodkową** oraz
 styczną (zgodną z kierunkiem obrotu płyty) – równoważoną przez
 siłę działającą stycznie, przeciwnie do kierunku obrotu płyty –
siłę Coriolisa – jest to SIŁA POZORNA
 działa w obracającym się układzie odniesienia!

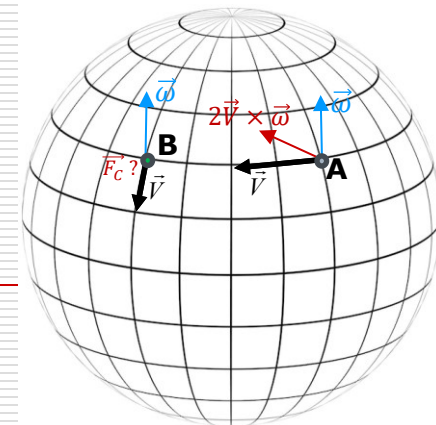
$$\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}$$

Ciało wyrzucone w punkcie X, na półkuli północnej, pionowo w górę z prędkością $\vec{V}$, doznaje przyspieszenia Coriolisa stycznego do równoleżnika przechodzącego przez punkt X.

Z kolei ciało poruszające się z prędkością styczną do równoleżnika przechodzącego przez punkt Y doznaje przyspieszenia Coriolisa skierowanego do środka Ziemi.



Siła Coriolisa - przykłady



Przykładowe zadania na siłę Coriolisa

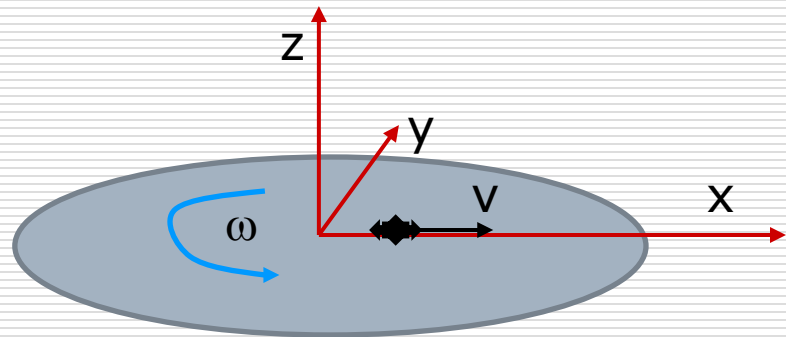
Dwaj myśliwi strzelali do tarcz strzelniczych. **A** strzelał do tarczy znajdującej się na zachód od niego, **B** do tarczy znajdującej się w kierunku południowym. Obydwaj spudłowali i tłumaczyli swoje niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa. Który z nich miał większe prawo tak się tłumaczyć – odchylenie którego pocisku pod wpływem siły Coriolisa było większe? Jak jest wielkość odchylenia pocisku, jeżeli średnia prędkość $v_0 = 300 \text{ m/s}$, czas lotu $t = 1 \text{ s}$ a szerokość geograficzna $\varphi = 49^\circ$.

ODP.: $\Delta x_A \approx 2,2 \text{ cm}$ $\Delta x_B \approx 1,7 \text{ cm}$

Przykład 8:

Zapisz – w układzie nieinercyjnym, wektory wszystkich sił działających na mrówkę wędrującą po płycie gramofonowej z przykładu powyżej. Zapisz wektor wypadkowy tych sił.

- Siła grawitacji
- Siła reakcji
- Siła Coriolisa
- Siła odśrodkowa bezwładności
- Siła tarcia
- Siła boczna wywierana przez płytę na mrówkę.



$$\vec{F}_w = -mg\hat{k} + mg\hat{k} - 2\omega v m\hat{j} + mr\omega^2\hat{i} - mgf\hat{i} + F_s\hat{j} = 0$$

Podsumowanie

- ❑ Błędny jest przekonanie, że do podtrzymania ruchu potrzebna jest siła (patrz zasada bezwładności – I zasada dynamiki Newtona)
- ❑ Pojęcia: ruch i spoczynek mają sens jedynie względem konkretnego układu odniesienia
- ❑ Zasady dynamiki obowiązują w układzie inercyjnym. W układach nieinercyjnych wprowadza się siły pozorne, aby móc nadal stosować zasady dynamiki
- ❑ Ziemia może być traktowana jak układ inercyjny, lecz są zjawiska, które mogą być wyjaśnione jedynie przy uwzględnieniu sił pozornych: odśrodkowej i Coriolisa

Dynamika układów o zmiennej masie

- Ruch pod wpływem stałej siły F pojazdu o rosnącej masie.
(m_0 - masa początkowa)

stały przyrost masy

$$\frac{dm}{dt} = \mu = \text{const} \quad \Rightarrow \quad m = m_0 + \mu \cdot t$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$F = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} = \mu \cdot v + (m_0 + \mu \cdot t) \frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt}$$

rozdzielamy zmienne:



$$F - \mu v = (m_0 + \mu t) \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{F - \mu v} = \frac{dt}{m_0 + \mu t}$$

po scałkowaniu:

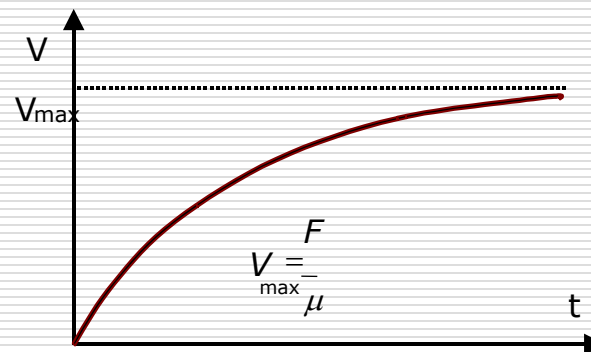
$$\int_0^v \frac{\mu dv}{F - \mu v} = \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 + \mu t} \Rightarrow -\ln(F - \mu v) \Big|_0^v = \ln(m_0 + \mu t) \Big|_0^t \quad \text{podstawiając granice:}$$

$$-\ln(F - \mu v) + \ln F = \ln(m_0 + \mu t) - \ln m_0$$

$$\ln \frac{F}{F - \mu v} = \ln \left(\frac{m_0 + \mu t}{m_0} \right) \Rightarrow \frac{F}{F - \mu v} = \frac{m_0 + \mu t}{m_0}$$

stąd ostatecznie:

$$v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} \Rightarrow v = \frac{F}{\frac{m_0}{t} + \mu} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{F}{\mu}$$



□ Ruch pod wpływem stałej siły, ciała o malejącej masie

$$F = \frac{dp}{dt} + \mu v$$

siła odrzutu



$$F - \mu v = \frac{d(mv)}{dt} \Rightarrow F - \mu v = \frac{d(m_0 - \mu t)}{dt} v + m \frac{dv}{dt}$$

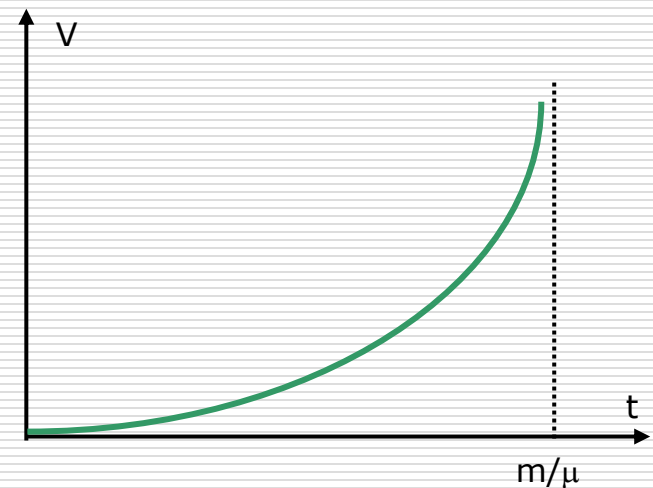
więc otrzymujemy

podobnie jak w poprzednim przypadku

$$F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow F = (m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt}$$

ostatecznie:

$$v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$



Przykład 10:

- Rakieta o masie początkowej M_0 poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo w stałej ilości $dm_g/dt = r$ [kg/s], nadając mu względem rakiety prędkość U .

Zapisz zasadę zachowania pędu w nieruchomym układzie odniesienia (porusza się w nim rakieta). Przy zapisie końcowego wzoru pamiętaj, że w porównaniu z masą M rakiety w dowolnej chwili dt ilość wyrzuconych gazów dm jest do zaniedbania.

Korzystając z zasady zachowania pędu:

- a) Oblicz przyspieszenie początkowe rakiety.
- b) Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą i jego rozwiązanie $V(M)$
- c) Znajdź jego rozwiązanie zależne od czasu $V(t)$.