

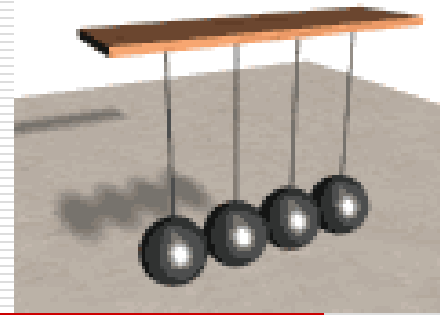
Wykład 9: Drgania

dr inż. Zbigniew Szklarski

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Drgania to:



- Drgania mechaniczne
- Drgania elektromagnetyczne

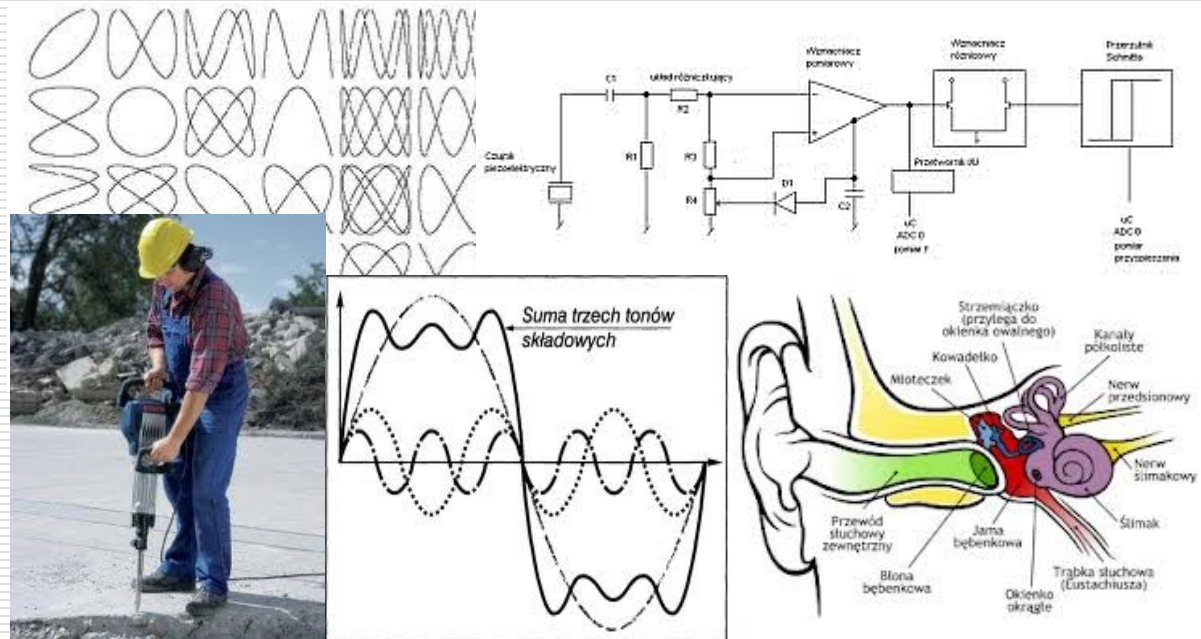
Opis poprzez te same równania

ruch:

- okresowy (periodyczny)
- oscylacyjny

pojęcia:

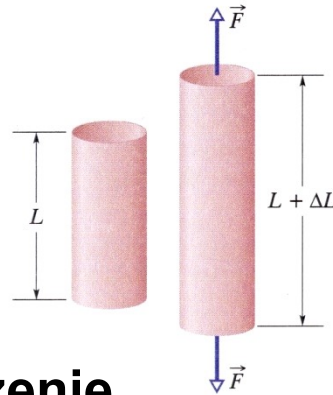
- okres
- częstotliwość
- amplituda



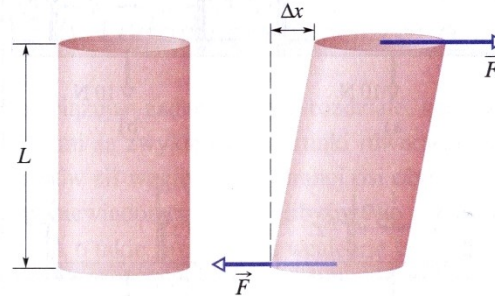
Skąd się biorą drgania – własności sprężyste ciał stałych

$$\frac{\Delta L}{L}$$

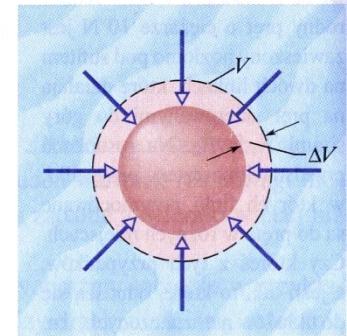
Odształcenie
względne



**naprężenie
rozciągające**



**naprężenie
ścinające**



**naprężenie
objętościowe**

NAPRĘŻENIE

to siła odkształcająca przypadająca na
jednostkową powierzchnię na którą
działa

$$\sigma = \frac{F}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

zależy od materiału (moduł
sprężystości) i odkształcenia

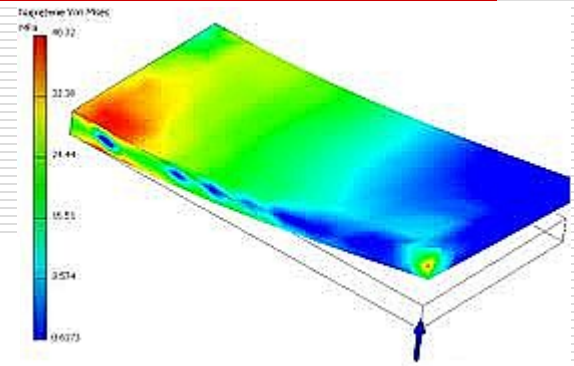
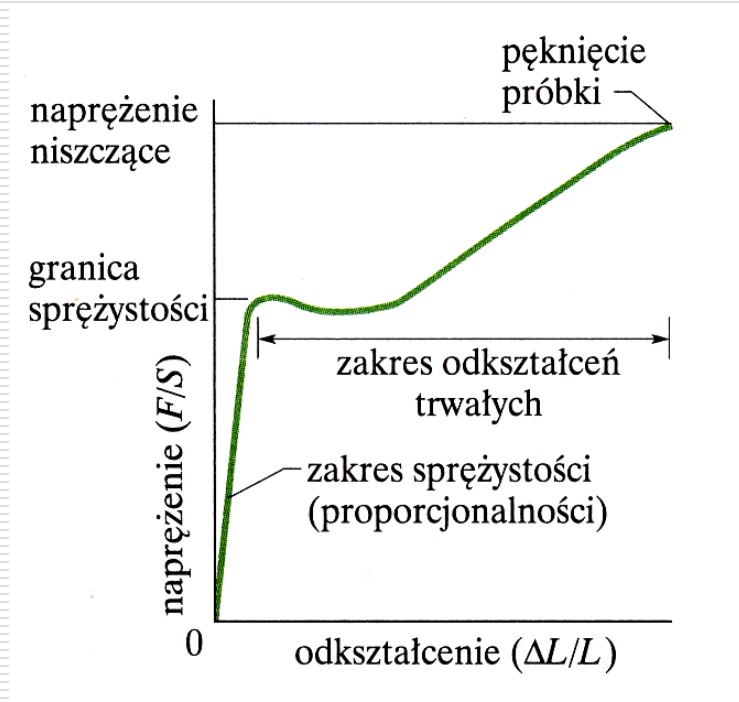
$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

E – moduł Younga

Prawo Hooke'a (1635-1703 r.)

Dla małych naprężeń, odkształcenie jest proporcjonalne do siły, która je wywołuje.

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$



Oscylator harmoniczny

Dla małych wychyleń (w granicach sprężystości)

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

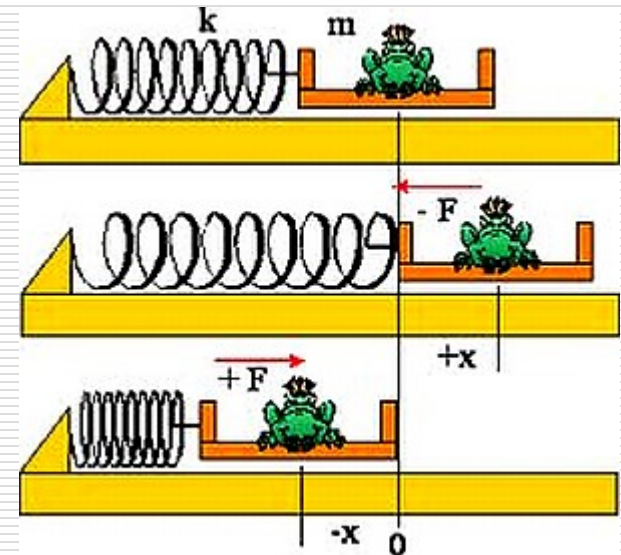
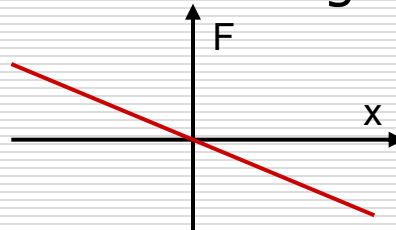


$$F = \frac{E \cdot S}{L} \Delta L \quad k = \frac{E \cdot S}{L}$$

siła – proporcjonalna do wychylenia
z położenia równowagi oraz ..

zwrot – do położenia równowagi (**przeciwnie** do wychylenia)

$$F = -kx$$



$$\vec{F} = F\hat{i} \quad \vec{x} = -x\hat{i}$$

$$F\hat{i} = -kx\hat{i} \Rightarrow F = -kx$$

Równanie ruchu oscylatora

Siła harmoniczna $\Rightarrow$ prawo Hooke'a $F = -kx$

Siła wypadkowa $F = ma \Rightarrow ma = -kx$

II zasada dynamiki, równanie ruchu: $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

podstawiając $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ rozwiązanie równania: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

częstość drgań własnych
- zależy od parametrów
układu drgającego

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

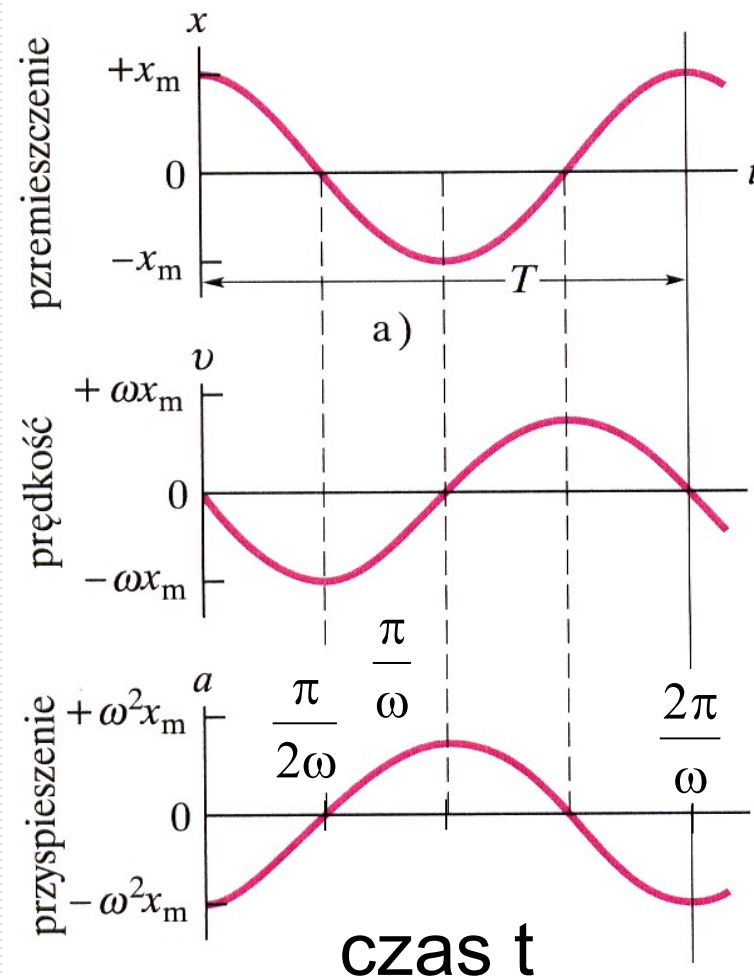
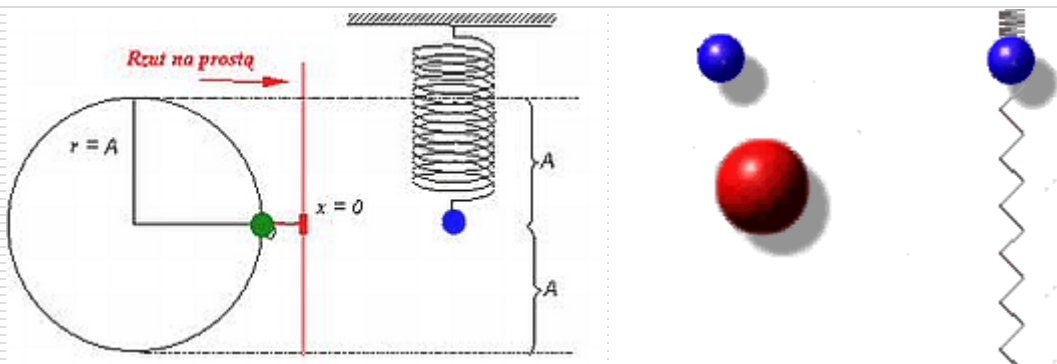
skoro:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

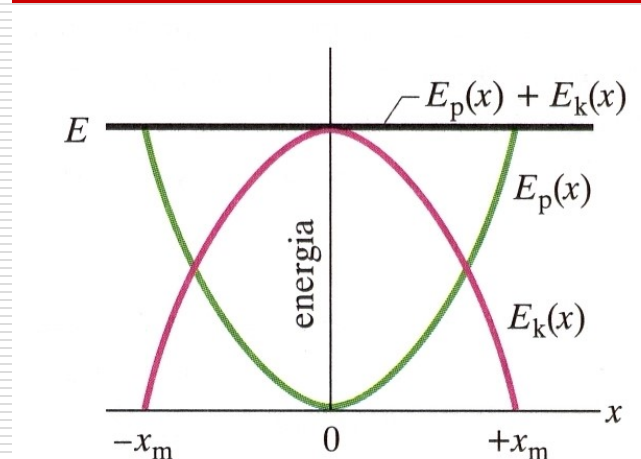
to:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



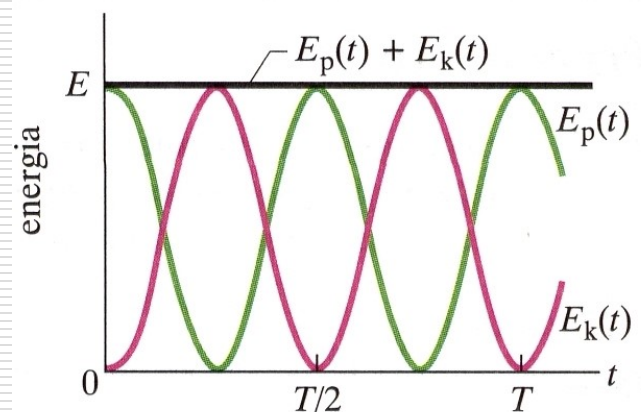
Energia w ruchu harmonicznym



energia potencjalna sprężystości

$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$



energia kinetyczna

$$E_k = m \frac{v^2}{2}$$

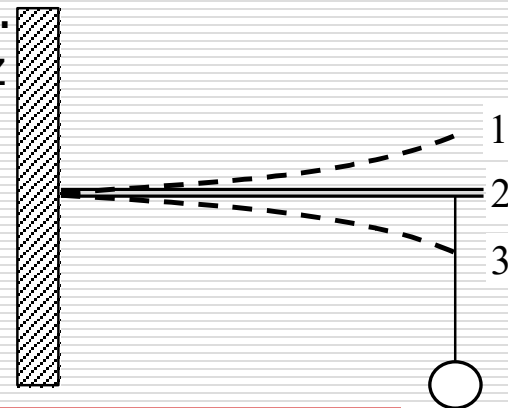
$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

energia całkowita 

$$E_C = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2$$

Przykłady

- ❑ Masa zawieszona na sprężynie spowodowała jej rozciągnięcie o 10 cm. Jeżeli wytrącimy tę masę z położenia równowagi, to będzie ona wykonywać drgania harmoniczne. Oblicz okres tych drgań.
- ❑ Która energia: kinetyczna czy potencjalna i ile razy jest większa w chwili gdy wychylenie cząstki z położenia równowagi wynosi $1/3$ amplitudy ?
- ❑ Na końcu poziomej, sprężystej listewki, zamocowanej w uchwycie, zaczepiono na nici odważnik o masie m . Wytrzymałość nici na zerwanie wynosi F_z . Listewka z ciężarkiem wykonuje drgania o amplitudzie A .
 1. W jakim położeniu listewki 1, 2 czy 3 na nią działa największa siła ?
 2. Oblicz, dla jakiej częstotliwości f_k drgań listewki, nić ulegnie zerwaniu.

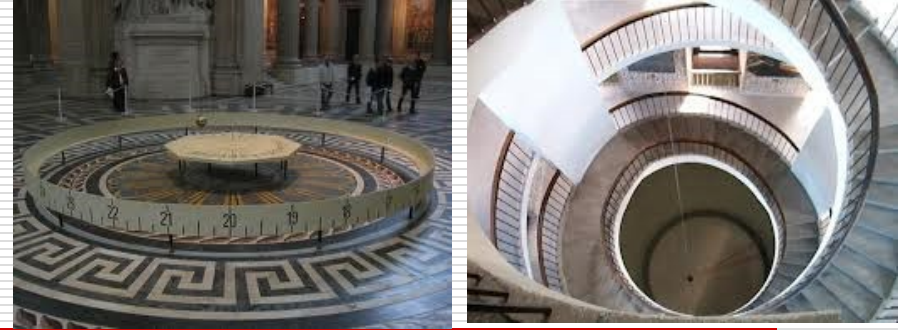


Zadanie

Ciało o masie m umocowane do sprężyny odciągnięto z położenia równowagi na odległość L i puszczono swobodnie aby wykonywało drgania harmoniczne o okresie T . **Oblicz:**

- ☐ czas, w którym ciało przebędzie drogę od położenia początkowego do połowy maksymalnego wychylenia.
- ☐ prędkość ciała w połowie maksymalnego wychylenia.
- ☐ maksymalną wartość siły sprężystości.
- ☐ całkowitą energię mechaniczną drgań.
- ☐ czas po którym energia kinetyczna oscylatora będzie równa jego energii potencjalnej.

Przykłady oscylatorów harmonicznych



□ Wahadło matematyczne

Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$M = -L(F_g \sin \theta) = -Lmg \sin \theta$$

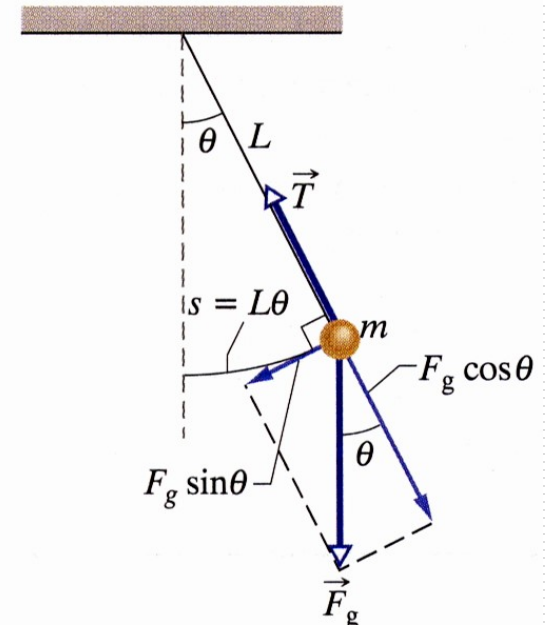
znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Zakładamy, że kąt θ jest mały (małe drgania) czyli $\sin \theta \approx \theta$:

$$M = -Lmg \theta$$



$$M = -Lmg \theta \quad M = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Lmg \theta}{I} = 0$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + Lmg \theta = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$

ale

$$I = mL^2$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

**wzór prawdziwy dla
małej amplitudy drgań**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Lub: $F = -mg \cdot \sin \theta \approx -mg \theta \quad x = L\theta \Rightarrow F \approx -mg \frac{x}{L}$

Dla małych amplitud w ruchu harmonicznym

$$F = -kx$$

więc

$$k = \frac{mg}{L} \Rightarrow$$

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



□ Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym

$$M = -mgh \sin \theta$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

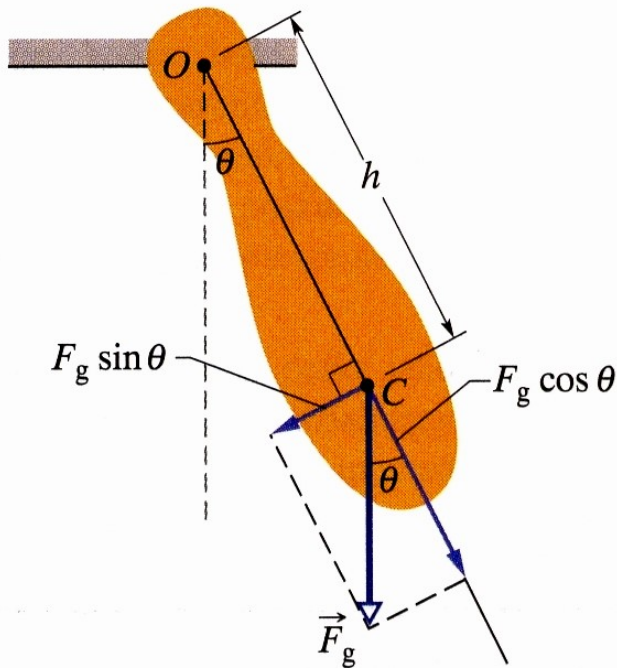
dla małych kątów θ

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgh\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_0 + mh^2}}$$

wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + mh^2}{mgh}}$$

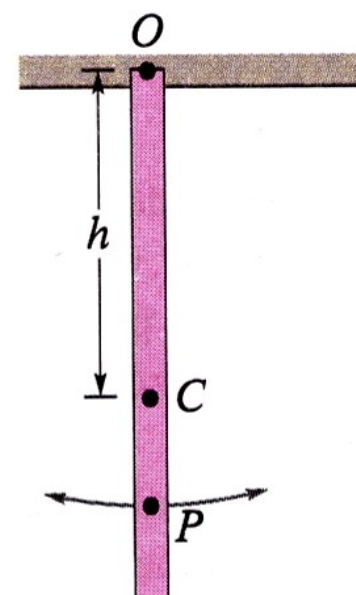


Przykład wahadła fizycznego

Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O, znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T , wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.

Rozwiązanie:
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{śm}} + mh^2}{mgh}} \quad I_{\text{śm}} = \frac{1}{12}mL^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg \frac{L}{2}}} \Rightarrow g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



Zadanie

Cienki, jednorodny pręt o masie m i długości L zawieszono w odległości $x = 1/3 L$ od jego końca. Pręt wychylono o niewielki kąt z położenia równowagi, a następnie puszczono swobodnie.

- Oblicz moment bezwładności takiego wahadła.
- Oblicz wypadkowy wektor momentu siły działający na wahadło.
- Podaj różniczkowe równanie ruchu tego wahadła fizycznego stosując przybliżenie małych kątów i na jego podstawie oblicz okres drgań tego wahadła.

□ Wahadło torsyjne

$$M = -\kappa\theta$$

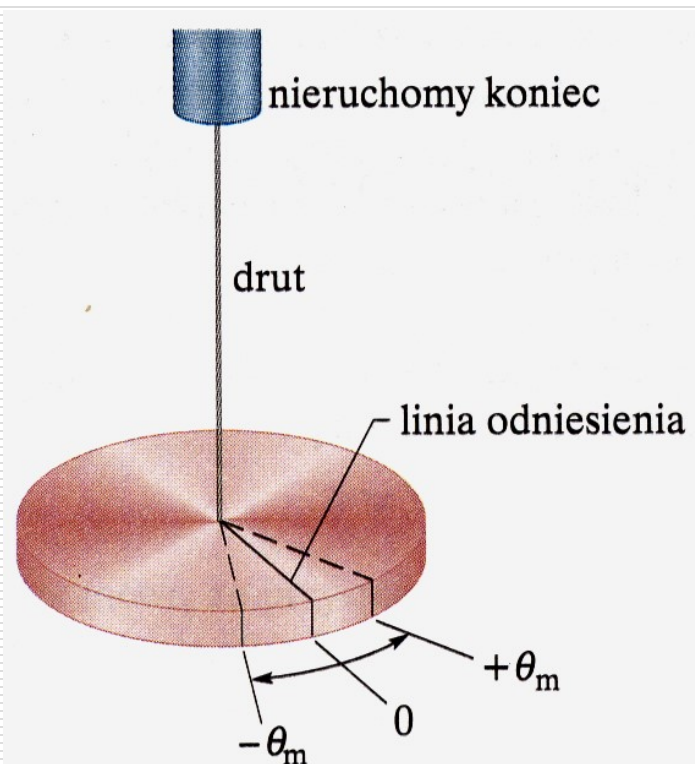
moment kierujący κ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

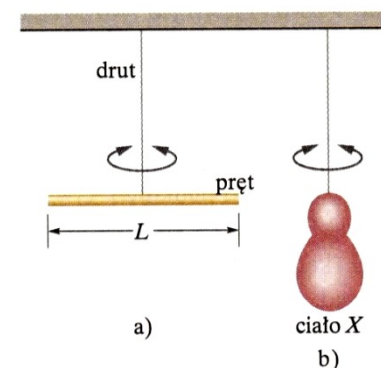
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

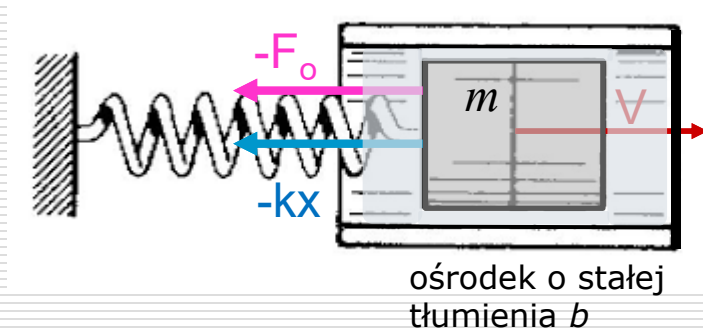
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$



Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach



Ogucania tŁumione



Po wychyleniu m , na ruch wpŁywajĄ:

$$F_{\text{sprężystości}} + F_{\text{oporu}} = F_{\text{wypadkowa}}$$

Siła oporu – siła Stokes'a

$$F_{\text{oporu}} = -b \cdot V \text{ gdzie } b \text{ to stała tŁumienia} \quad \text{zatem } ma = -kx - bV$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

gdzie $\beta = \frac{b}{2m}$ to współczynnik tŁumienia

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

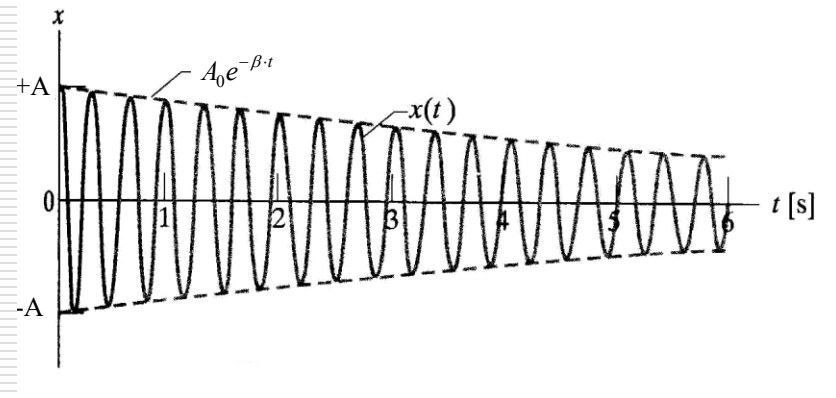
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

Dla małych wartości współczynnika tłumienia, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$

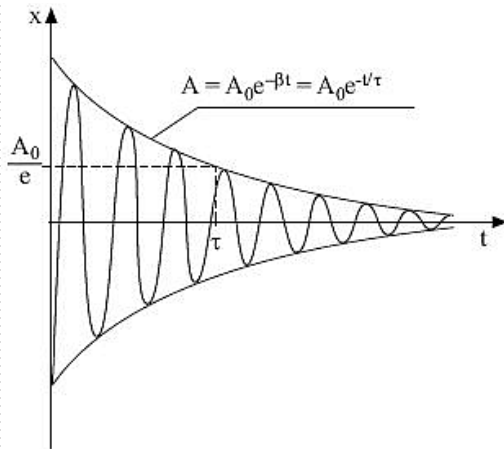
gdzie $A(t)$ jest malejącą w czasie amplitudą oscylatora harmonicznego

$$A(t) = A_o e^{-\beta \cdot t}$$

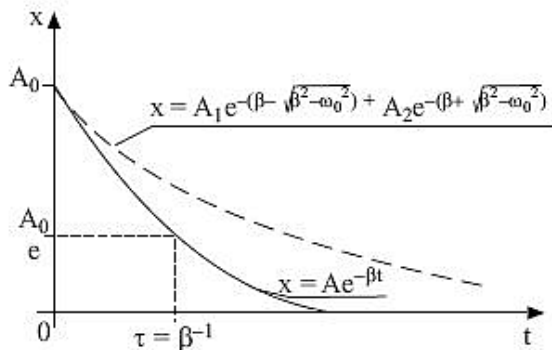


oraz

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$



Zależność $x = x(t)$ dla drgań tłumionych



Zależności $x = x(t)$ dla dwóch rozwiązań aperiodycznych $\beta = \omega_o$ i $\beta > \omega_o$

$$x(t) = \underbrace{A_o e^{-\beta \cdot t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia

rozwiązanie periodyczne – gdy:

$$\omega_o \gg \beta \text{ bo } \omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 > 0$$

τ - czas relaksacji (amplituda maleje e – razy)

Miarą tłumienia jest logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\lambda = \ln \frac{A_o e^{-\beta \cdot t}}{A_o e^{-\beta(t+T)}}$$

$\omega_o = \beta$ rozwiązanie krytyczne

$\omega_o < \beta$ rozwiązanie aperiodyczne

$$x(t) = A_o e^{-\beta \cdot t}$$



Przykłady

- Amplituda drgań tłumionych maleje w ciągu jednego okresu (2s) do 1/3 swojej wartości początkowej. Obliczyć logarytmiczny współczynnik tłumienia oraz współczynnik tłumienia.

Rozwiązanie:

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0}{\frac{1}{3}A_0} = \ln 3 = 1,098$$

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad \beta = \frac{\lambda}{T} = 0,55$$

- Masa $m = 1$ kg wykonuje drgania tłumione o okresie $T = 2$ s. W trakcie 5 cykli drgań ich energia maleje do połowy początkowej wartości. Oblicz logarytmiczny dekrement tłumienia oraz stałą tłumienia.

Rozwiązanie:

Energia:

$$E_{t=5T} = E_5 = \frac{1}{2} k A_5^2 = \frac{1}{2} E_1 \quad E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad \frac{1}{2} k A_5^2 = \frac{1}{4} k A_1^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_5} = \sqrt{2}$$

Amplitudy:

$$A_5 = A_1 e^{-\beta 5T} = A_5 \sqrt{2} e^{-\beta 5T} \quad 1 = \sqrt{2} e^{-\beta 5T} \quad e^{-\beta 5T} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{skoro } \lambda = \beta T \quad e^{-5\lambda} = 2^{-1/2} \Rightarrow -5\lambda = \ln 2^{-1/2} = -\ln \sqrt{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \ln \sqrt{2} = 0,0693 \quad \beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,0693}{2} = 0,035$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \text{stąd} \quad b = 2m\beta = 0,07$$

Rezonans

□ Periodyczne wymuszenie: $F = F_0 \cos \Omega t$

□ Równanie tłumionego oscylatora harmonicznego z wymuszeniem:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cos \Omega t \quad \text{gdzie:} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{F_0}{m}$$

W stanie ustalonym drgania oscylatora zachodzą z częstością wymuszenia Ω

□ Rozwiązanie równania: $x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi(\Omega))$

Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

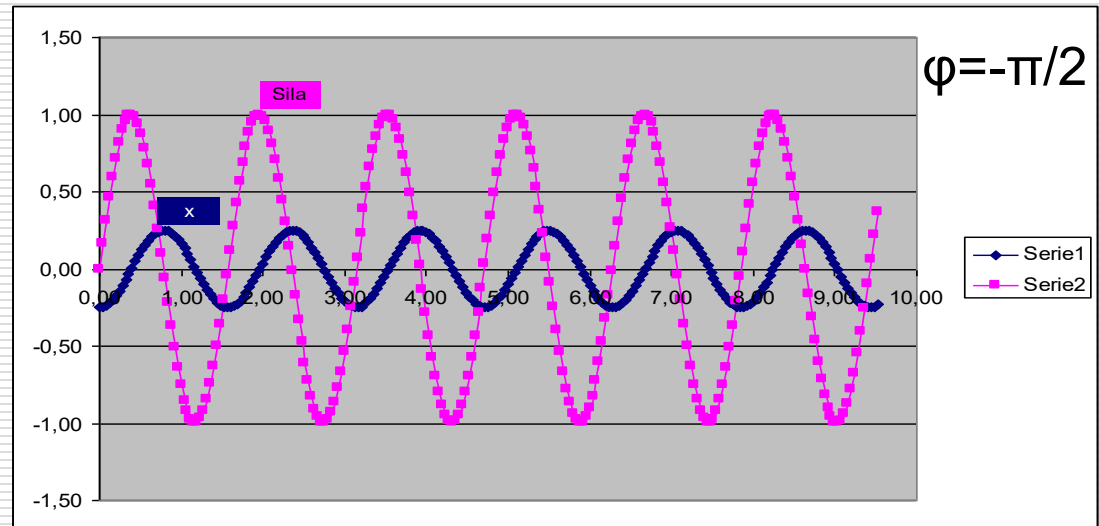
□ amplituda $A(\Omega)$ jest funkcją częstości wymuszenia

$$A(\Omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

□ przesunięcie fazowe $\phi(\Omega)$ nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia.

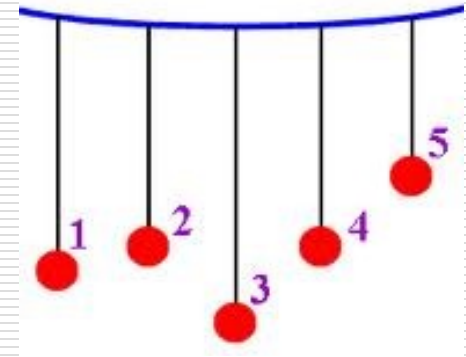
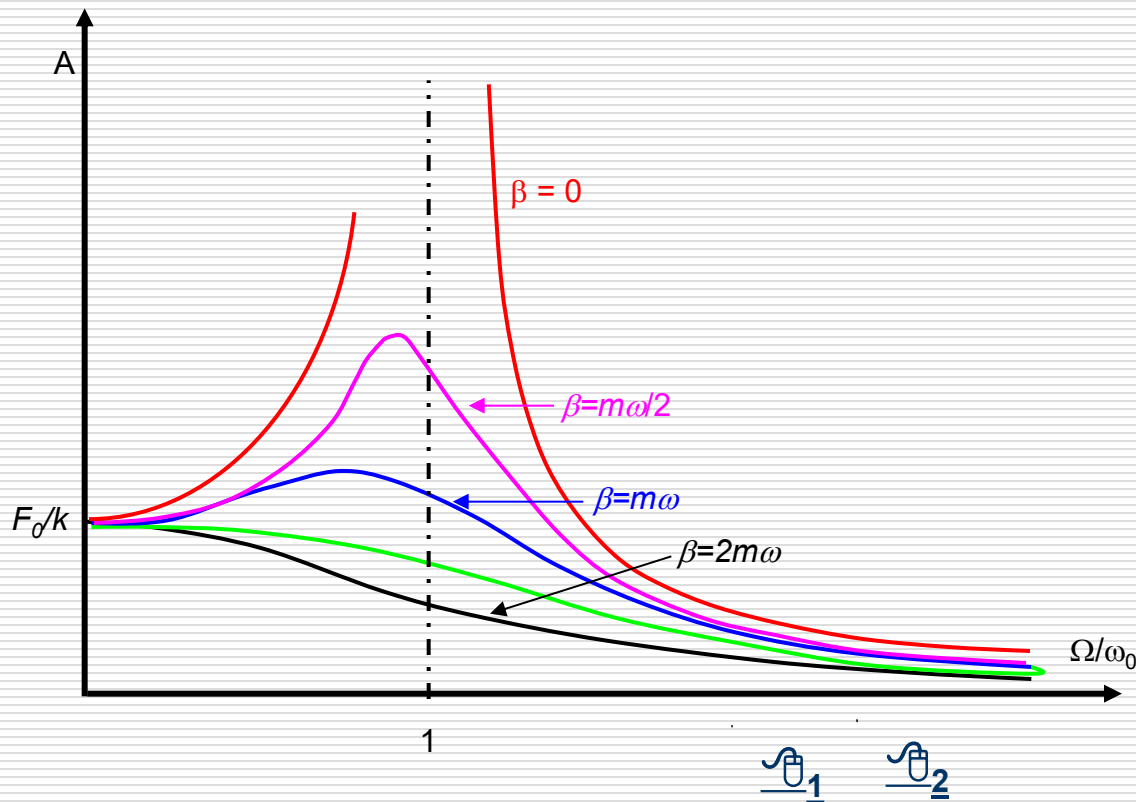
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Informuje o jaki kąt maksimum wychylenia wyprzedza maksimum siły wymuszającej



- Rezonans występuje gdy amplituda osiąga wartość maksymalną
co w praktyce oznacza że częstość wymuszenia Ω zbliża się do częstości drgań własnych ω_0

$$A(\Omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$



rezonans parametryczny

Składanie drgań

□ zachodzących w tym samym kierunku

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

gdy amplitudy i częstości są jednakowe, a drgania są przesunięte w fazie o φ :

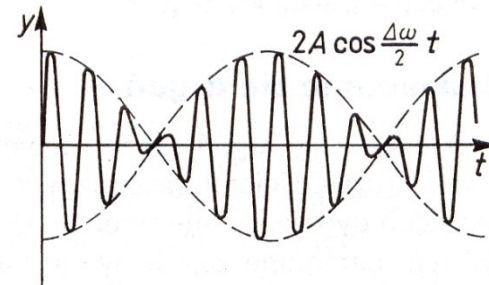
$$x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

gdy $\varphi = \pi$ - wygaszenie drgań

gdy $\varphi = 2\pi$ - wzmocnienie

$$x_{wyp} = 2A \cos(\omega t)$$

Gdy drgania mają zbliżoną częstotliwość otrzymujemy drgania o modulowanej amplitudzie.

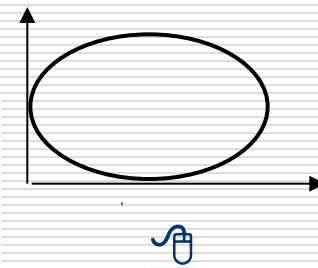
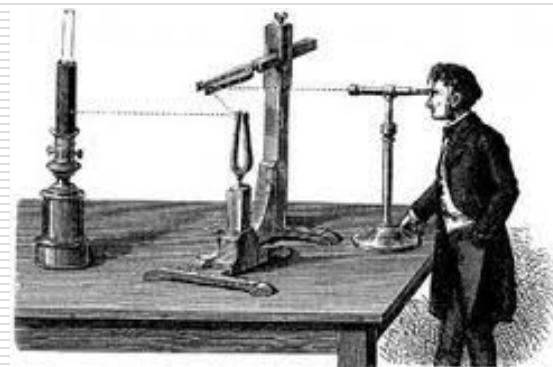


- Składanie drgań zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

np. $x(t) = A_x \sin \omega t$ $y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ $\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1$

Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857

Kąt φ Stosunek częstotliwości	0°	45°	90°	135°	180°
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{1}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{2}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{3}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{2}{3}$					



Przykład

Do płytek odchyłania poziomego i pionowego oscyloskopu przyłożono napięcia: $U_x = a \cdot \sin \omega t$ oraz $U_y = b \cdot \cos 2\omega t$.
Wyznaczyć tor promienia na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie:

Równanie toru – należy wyeliminować czas z równań:

$$\frac{U_y}{b} = \cos 2\omega t \quad \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2 \sin^2 \omega t$$

$$\frac{U_x}{a} = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{U_y}{b} = 1 - 2 \left(\frac{U_x}{a} \right)^2 \quad \text{stąd} \quad U_y = b - \frac{2b}{a^2} U_x^2$$

parabola !